This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

LIBRARY OF THE
Leland Stanford Junior University

537
M4653B

537
M4653
&

VORLESUNGEN

ÜBER

MAXWELLS THEORIE
DER ELEKTRICITÄT UND DES LICHTES

VON

DR. LUDWIG BOLTZMANN,
PROFESSOR DER THEORETISCHEN PHYSIK AN DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN.

I. THEIL

ABLEITUNG DER GRUNDGLEICHUNGEN FÜR RUHENDE, HOMOGENE, ISOTROPE KÖRPER.

MIT FIGUREN IM TEXT UND AUF ZWEI TAFELN

LEIPZIG
JOHANN AMBROSIUS BARTH
1891

A 10389

MICROFILM AVAILABLE

Pres. '89

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

„So soll ich denn mit saurem Schweiss
Euch lehren, was ich selbst nicht weiss.

Dieses Wort Faust's ist wohl Niemandem so sehr aus der Seele gesprochen wie dem, der über die wahre Natur der Elektricität vortragen will. Möge man daher dies bischen Poesie als Einleitung zu trockenen Formeln nicht mit allzu schelen Augen ansehen.

Gauss soll einmal einem Freunde auf die Frage nach den Fortschritten einer dringenden Arbeit geantwortet haben: „Alle Formeln und Resultate sind fertig, nur den Weg muss ich noch finden, auf dem ich dazu gelangen werde." Ich glaube nicht, dass Gauss dies gesagt hat, er war nicht so aufrichtig; gedacht hat er es gewiss oft. Anders Maxwell; er schildert uns genau, zu welchem Zwecke er die sechseckigen Aetherzellen, die in den Zellwänden beweglichen Friktionsrollen und alle anderen Embleme seiner ersten Theorie, die er einmal selbst *somewhat awkward* nennt, erfand; er erzählt, welche ihm die meiste Mühe machten und wie er damit zu den Formeln gelangte, deren Gewalt Hertz in seinem Heidelberger Vortrage so gut charakterisirt. Später gab er wohl eine einfachere Begründung

seiner Formeln; allein ein Weg, welcher in allseitig befriedigender Weise dazu führt, ist noch heute nicht gefunden.

Kein Wunder daher, dass sich zur Fortführung des Baues nun die Kärrner einfinden. Ein solcher Kärrner, dem die Aufgabe ward, den Weg zum Gebäude zu ebnen, die Façade zu putzen, vielleicht auch dem Fundamente noch den einen oder anderen Stein einzufügen, will ich sein, und ich bin stolz darauf; denn gäbe es keine Kärrner, wie möchten wohl die Könige bauen?

Drei Dinge musste ich da vor allem, wollte ich meinen Zweck erreichen, anstreben: Klarheit, Anschaulichkeit und Kürze. Die erstere wurde dadurch wesentlich erleichtert, dass ich von der von Helmholtz ausgebildeten Theorie der cyklischen Bewegungen den ausgedehntesten Gebrauch machte. Im Interesse der Kürze liess ich die Betrachtung inhomogener und anisotroper Körper fast ganz bei Seite. Ich lasse mir gerne den Vorwurf gefallen, dass dadurch die Allgemeinheit und Formvollendung verlor, wenn es mir dafür gelang, ein beschränktes Gebiet recht deutlich zu machen; denn wer in einem solchen vollkommen klar sieht, der hat dann sicher ausreichendes Rüstzeug zur Lectüre der Originalabhandlungen, die ja durch dieses Buch nicht erspart, nur erleichtert werden soll und von denen man die wichtigsten am Schlusse zusammengestellt findet. Uebrigens hoffe ich, das hier Versäumte in späteren Fortsetzungen dieser Vorlesungen nachholen zu können, wo auch die älteste Maxwell'sche Theorie, die elektromagnetische Theorie der Dispersion, Polarisation, Doppelbrechung und Drehung der Polarisationsebene des Lichtes, sowie der Hertz'schen Schwingungen behandelt werden soll.

Ich habe es auch nicht verschmäht, durch viele Figuren, Zusammenstellungen, Marginalien etc. der Anschauung und

Uebersicht nachzuhelfen und bin dem Herrn Verleger für die Geduld und das Geschick dankbar, womit er meinen darauf bezüglichen Wünschen entgegenkam.

Eins noch scheint mir nicht unwerth der Erwähnung. Ich habe mich überall genau an die, übrigens auch sehr bequeme Bezeichnung Maxwell's gehalten. Man glaubt kaum, wie sehr das gleichzeitige Studium zahlreicher Abhandlungen durch den rein äusserlichen Vortheil einer wenigstens im Allgemeinen eingebürgerten einheitlichen Bezeichnung gefördert wird; wenn die Begriffe noch ein wenig schwanken, wie hier, ist dieser Vortheil sogar noch grösser, da die einheitliche oder ähnliche Bezeichnung immer Veranlassung zur Abgrenzung der Begriffe und Vergleichung der Definitionen verschiedener Autoren wird. Dies beweisen am besten die Schwierigkeiten, die man beim Entwurf einer vergleichenden Tabelle der verschiedenen Bezeichnungen, eines „Schlüssels", wie ich mir selben zu meinem Privatgebrauche anfertigte und ihn am Schlusse des Buches ebenfalls beifüge, findet, und die dieses ohnedies sehr unzureichende Surrogat der einheitlichen Bezeichnung noch werthloser machen. Ich bitte daher alle künftigen Schriftsteller auf diesem Gebiete, meinem Beispiele folgend, wenigstens im Grossen und Ganzen zu den Bezeichnungen Maxwell's zurückzukehren und wäre, wenn durch vorliegendes Buch nichts als dies erreicht würde, schon mit dem Erfolge meiner Arbeit zufrieden.

Dass es mir trotz meiner Bemühungen nicht gelungen ist, überall ganz den Sinn Maxwell's zu treffen und alle Dunkelheiten aufzuhellen, weiss ich selbst am besten (vide Motto!). Ich wünsche nichts, als dass der Theorie zum Gewinn recht bald recht Vieles verbessert werde, ja dass bald die Zeit komme, wo ein neuer Schritt in unserer Kenntniss des Wesens der Elektricität gethan wird und Niemand

mehr dieses unsere völlige Unbekanntschaft mit der Natur der Elektricitätsbewegung postulirende Büchlein liest. Mögen dann immerhin Andere die Früchte unseres Strebens ernsten, aber von den Theorien und Experimenten, zu deren Auseinandersetzung ich jetzt schreiten will, mögen sie dann sagen: „es ging ein Frühling auf in jenen Tagen!“

München, im März 1891.

Ludwig Boltzmann.

Inhaltsverzeichniss.

Art.		Seite
	Erste Vorlesung.	
	Einleitung; Lagrange's Bewegungsgleichungen.	
1.	Fernwirkung oder Medium?	1
2.	3. Newton	1
4.	Fernwirkende Molekularkraft. Weber, Zöllner	2
5.	Faraday, Thomson, Maxwell	2
6.	Fortpflanzungszeit ohne Medium	2
7.	Noch einmal die Molekularkräfte	3
8.	Wir betrachten den Galvanismus vor der Reibungselektricität	3
9.	1. Erfahrungssatz. (Existenz elektrischer Ströme)	4
10.	1. Hypothese. Mechanische Natur elektrischer Ströme	4
11.	2. Erfahrungssatz (elektrische Ströme sind stationär)	4
12.	Cykeln	5
13.	Unechte Cykeln, deren Bedeutung in der Technik	5
14.	Allgemeine Coordinaten	6
15.	Allgemeine Kräfte	6
16.	Lagrange's Bewegungsgleichungen	7
	Zweite Vorlesung.	
	Mechanische Analogie des zweiten Hauptsatzes der Wärmelehre.	
17.	Beispiel	8
18.	Mechanische Analogie des zweiten Hauptsatzes	9
19.	Kreisprocesse	9
20.	Erster Theilprocess	10
21.	Zweiter Theilprocess	10
22.	Dritter Theilprocess	11
23.	Vierter Theilprocess	11
24.	Berechnung der geleisteten Arbeit	12
25.	Nicht umkehrbare Kreisprocesse	12
26.	Die Theorien sind blosse Bilder der Naturprocesse	13

Art. Seite

Dritte Vorlesung.

Bewegungsgleichungen für Cykeln; Beispiele.

27. Specialisirung der Gleichungen 2 14
28. Cyklische Coordinaten 14
29. Langsam veränderliche Coordinaten 15
30. Der Zustand ist Funktion von k und l' 15
31. Bewegungsgleichungen für Cykeln 16
32. Sind alle eingeführten Vernachlässigungen begründet? . . 16
33. Monocykeln. 2. Hypothese: Die v sind lineare Funktionen der l' 18
34. Beispiele von Monocykeln 20
35. Ein elektrischer Strom ist ein Monocykel 22
36. Bewegungshindernisse 22

Vierte Vorlesung.

Bicykel. Absolute Strommessung.

37. Bicykeln 24
38. Beispiele von Bicykeln 25
39. Idealer Mechanismus; Gleichungen für denselben 25
40. Discussion 28
41. 3. Erfahrungssatz (besser Definition der Stromintensität) . . 29
42. Absolute Messung der Stromintensität l' 30
43. 4. Erfahrungssatz. Joule's Gesetz. Messung von ω . . . 31
44. Ohm's Gesetz ist Consequenz unserer Annahmen. Messung von L 31

Fünfte Vorlesung.

Bewegungshindernisse im Dielektricum. Zwei Stromkreise mit Condensatoren. Messung der übrigen Grössen.

45. Widerstand am Modell 32
46. 5. Erfahrungssatz. Widerstand am Dielektricum 32
47. 3. Hypothese. Ergänzung zum 2. Erfahrungssatze 33
48. Gleichungen für die elektrischen Oscillationen 34
49. Bedeutung des Modells in der Theorie. Theorie einer unbekannten Bewegung 35
„ Discussion der Gleichungen 16 36
50. Erhaltung der Arbeit. Joule'sche Wärme 36
„ Auf Dielektrisirung verbrauchte Arbeit. Aeussere Arbeit.
„ Elektrokinetische Energie 37
51. Messung von A 38
„ Messung von ϑ 39

Art. Seite
52. Messung von C 39
53. Andere Schaltungen von Cond. und Widerstand 40

Sechste Vorlesung.

Praktische Ausführung der Modelle.

54. Mechanismus, um A, B, C unabhängig veränderlich zu machen 42
„ 1. Theilmechanismus 43
„ 2. Theilmechanismus 44
55. Praktische Ausführung solcher Modelle 44
„ Reales Monocykel 45
56. Reales Bicykel 46
57. 58. Experimente mit dem realen Bicykel. 48

Siebente Vorlesung.

Polycykel. Begriff des Momentes.

59. Uebergang zu neuen Phänomenen 49
60. Polycykeln 49
61. 62. Corollar zur 3. Hypothese.: die in den Elementen thätigen Mechanismen sind, wie die der ganzen Ströme, den obigen Gleichungen unterworfen 50
63. Aufstrom 51
64. Lebendige Kraft des Polycykels 51
65. Wovon hängt das Moment eines Stromes ab? 52
„ Moment eines Curvenelementes und einer Curve. 52
66. 6. Erfahrungssatz: der Strom hat eine Richtung 53
67. Elektromotorische Kraft im Aufstrom. 53
68. Moment einer Summe (Consequenz) 54
„ $J(ds)$ ist proportional ds 55
„ $J(s) = \int J ds$, J als Linienintegral 55
69. Ponderomotorische Kraft auf den Aufstrom 55
70. Elektrokinetische Energie des Aufstroms. 56

Achte Vorlesung.

Eigenschaften des Momentes. Stokes' Satz.

71. J als Flächenintegral (Consequenz). 57
72. Componenten des Momentes J. (Consequenz) 58
73. Momentenvektor 59
74. Coordinatensystem mit Rechtsschraubendrehung (Weinrankendrehung) 60
75. Stokes' Satz in der Ebene 60

Art.		Seite
76.	Stokes' Satz im Raume	62
„	Vektor, Componenten und Gleichungen der magnetischen Induktion	63
77.	Solenoide	66
78.	7. Erfahrungssatz. Auf geschlossene Solenoide wirkt keine Kraft	68
79.	Kräfte auf offene Solenoide	69
80.	8. Erfahrungssatz. Biot-Savart's Fundamentalversuch	70

Neunte Vorlesung.
Elektrische Ströme in Körpern.

81.	Strömung im Raum	71
„	9. Erfahrungssatz. Ströme in Körpern sind ebenfalls gerichtet. Stromdichte	71
„	4. Hypothese. Superposition der Wirkung ∞ naher Ströme	72
82.	Componenten der Stromdichte. Stokes' Stromgleichungen	75
83.	5. Hypothese. Jedes Längenelement liefert zu ω einen unabhängigen Betrag	76
„	6. Hypothese. Die elektromotorische Kraft lässt sich in Componenten zerlegen	76
„	Componenten der galvanischen Kraft	77
„	Specifische Leitungsfähigkeit	77
84.	Joule's Wärme im Volumelemente	77
„	Elektrokinetische Energie eines Volumelementes	78
85.	Componenten der dielektrischen Polarisation	78
„	Reibungselektromotorische Kraft	78
„	Dielektrisirungszahl	79
„	Dielektrisirungsgleichungen	79
„	Energie der dielektrischen Polarisation in einem Volumelemente	79
86.	7. Hypothese. Superpositionsprincip im leitenden Dielektricum	79
„	Componenten des totalen und des galv. geleiteten Stromes	80
„	Superpositionsgleichungen	80
„	Widerstandsgleichungen	80

Zehnte Vorlesung.
Gesetze der stationären und angenähert stationären Strömung.

87.	Continuitätsgleichung der Induction und der Strömung	82
88.	Zusammenstellung der Vektoren	83
„	Recapitulation der Gleichungen	84

Art.		Seite
89.	Coulomb's Gesetz für Magnetpole	85
90.	Moment eines linearen Stromes auf einen Punkt	87
„	Gleichungen Kirchhoff's für Strömung im Raum	88
„	Biot-Savart's Gesetz	89
91.	Neumann's Gesetz für die Induction	90

Elfte Vorlesung.

Ampère's Gesetz. Elektrische Schwingungen.

92.	Arbeit bei Deformation eines linearen Stroms	92
„	Ableitung des Ampère'schen Gesetzes	93
„	Vorzüge der Maxwell'schen Theorie	96
93.	μ im Standard-Medium	97
94.	Allgemeine Gleichungen für elektrische Schwingungen	97
„	Die elektrischen Wellen sind transversal	99
„	Lineare, circulare, elliptische Polarisation	99
95.	Wellen in Isolatoren	100
„	Fortpflanzungsgeschwindigkeit	100
„	Richtung der magnetischen Schwingungen	100
96.	Wellen in Halbleitern	101
„	Dispersion	102
„	Absorption	102
„	Auswählende Absorption	102
„	Dielektrische Nachwirkung	102
„	Wellen in Leitern	103

Zwölfte Vorlesung.

Elektrostatik.

97.	Gleichung der freien Elektricität	104
98.	Dichte der Elektricität	106
99.	Leiter, Isolatoren	106
100. 101.	Unzerstörbarkeit der elektrischen Quantität	107
102.	Ansammlung der Elektricität an der Oberfläche eines Leiters	108
103.	Componenten und Gleichungen der (inneren) elektromotorischen Kraft	110
104.	Flächendichte der Elektricität	111

Dreizehnte Vorlesung.

Ponderomotorische Kräfte elektrisirter Kugeln; deren Abhängigkeit von k.

105.	Elektrostatische Fernwirkung	112
106.	Gleichförmig elektrisirte Kugel	112

Art. Seite
106. Zwei gleichförmig elektrisirte Kugeln 112
107. Elektricitätsmenge auf einer leitenden Kugel 116
108. Elektricitätsmenge in einer isolirenden Kugel 117
109. Abhängigkeit der Wirkungen von k und μ 118

Vierzehnte Vorlesung.

Statisches und magnetisches Maass. Elektrostatische Kräfte allgemein. Magnete. Schluss.

110. Statisches Maass 119
111. Umrechnung beider Maasssysteme 119
112. Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen in Luft 120
113. Selbstpotential einer elektrischen Kugel 121
114. Allgemeine Berechnung der Fernwirkung statischer Elektricität 121
115. Experimentelle Bestimmung der Dielektricitätsconstante . 123
116. Magnetisirungsgleichungen 125
„ Magnetismus 126
1. Anhang. Literaturübersicht 128
2. Anhang. Zusammenstellung der Bezeichnungen (Schlüssel) . 138

Erste Vorlesung.

Einleitung; Lagrange's Bewegungsgleichungen.

1. Die tägliche Erfahrung lehrt, dass wir den Bewegungszustand eines Körpers nicht beeinflussen können, wenn wir denselben nicht entweder direkt berühren, oder uns wenigstens durch eine, die Einwirkung übertragende Brücke (ein Zwischenmedium) in Gestalt eines Fadens, einer Stange oder selbst nur des Hauches unseres Mundes mit ihm in Verbindung setzen. Als man daher zuerst Magnetpole und später elektrisirte Körper aus gewissen Entfernungen auf einander wirken sah, konnte man sich dies nicht anders denken, als dass die Wirkung durch ein Zwischenglied, etwa eine feine, von den Körpern ausströmende Flüssigkeit, übertragen werde.[1])

Fernwirkung oder Medium?

2. Es ist bekannt, auf wie hartnäckigen Widerspruch Newton bei Aufstellung seines Gravitationsgesetzes stiess. Newton selbst neigte der Ansicht zu, dass die Fernwirkung zwischen den Himmelskörpern durch ein Medium übertragen werde; allein er unterliess es, uns irgend etwas Näheres von seiner Ansicht über die Beschaffenheit dieses Mediums mitzutheilen, treu seinem Grundsatze: hypotheses non fingo.

Newton.

3. Erst später vergass man hierauf und schrieb wohl gar den Namen Newton's auf das Banner der Theorie der unvermittelten Fernwirkung. Dies kam so: die Fernwirkungstheorie errang Triumph auf Triumph; nebenbei wurden zwar beständig Hypothesen über die Natur eines etwa sie vermittelnden Mediums aufgestellt; allein diese hatten keinen

[1]) Gilbert, *De magnete* etc. London 1600, liber II. cap. III u. IV.

nennenswerthen Erfolg. Selbst Goethe interessirte sich für die Frage (vgl. ein bekanntes Gedicht von ihm). Da gelangten die namhaftesten Forscher endlich zu der Ansicht, das Medium sei wohl überhaupt überflüssig und die Wirkung erfolge direkt ohne alle Vermittelung in die Ferne.

Fernwirkende Molekularkraft.

4. Da die Gesetze der magnetischen und elektrischen Erscheinungen ganz denselben Grundtypus zeigen wie das Gravitationsgesetz, so war es selbstverständlich, dass man auch diese Erscheinungen einer direkten Fernwirkung zuschrieb, ja Navier, Poisson, Cauchy und viele Andere versuchten auch die Molekularkräfte nach demselben Schema zu erklären; nur setzten sie hierbei an die Stelle der Newton'schen Funktion der Entfernung, da diese hier doch nicht allgemein auszureichen schien, meist eine andere, gewöhnlich unbekannt gelassene Funktion der Entfernung. Namentlich in Deutschland und Frankreich basiren die meisten neueren Abhandlungen und Lehrbücher auf diesem Grundgedanken,

Weber, Zöllner.

der durch Wilhelm Weber zur höchsten Vollendung gebracht wurde. Am energischsten vertrat Zöllner die Ansicht, dass das von Weber modificirte Newton'sche Fernwirkungsgesetz der wahre Schlüssel zur Erklärung der gesammten Natur sei. Ja mehr oder minder haben wir alle die Ideen von den direkt in die Ferne wirkenden magnetischen und elektrischen Fluiden gewissermassen mit der Muttermilch eingesogen.

5. Da ging gerade von England, dem die eigentliche Basis der Fernwirkungslehre entstammte, auch wieder die Gegenströmung aus. Faraday hatte sein ganzes Leben hindurch nie an eine unvermittelte Fernwirkung geglaubt; Sir William Thomson entwickelte dessen Ideen weiter, bis Maxwell aus denselben eine Theorie der magnetischen und elektrischen Erscheinungen schuf, welche unbeschadet der grossen Verdienste seiner Nachfolger doch wohl mit Recht für immer die Maxwell'sche Theorie genannt werden wird.

Faraday, Thomson, Maxwell.

Fortpflanzungszeit ohne Medium.

6. Es mag noch erwähnt werden, dass nicht lange nach Maxwell auch Gauss, Riemann, Lorenz, Karl Neumann und Edlund sich dessen Ideen näherten, indem sie annahmen, dass die Fernwirkung Zeit zu ihrer Fortpflanzung

brauche, was doch wohl nur erklärlich ist, wenn sie durch ein Medium übertragen wird. Allein da sie bloss diese zur Fortpflanzung nothwendige Zeit, sonst aber das Medium in keiner Weise berücksichtigten, so mussten nothwendig ihre Theorien an innerer Consequenz hinter der Maxwell's weit zurückbleiben. Auch Hankel's mechanische Theorie der Elektricität ist noch zu erwähnen.

Die Theorie Maxwell's ist den uns zur Gewohnheit gewordenen Ideen so diametral entgegengesetzt, dass wir zuerst alle unsere bisherigen Anschauungen von dem Wesen und der Wirksamkeit der elektrischen Kräfte hinter uns werfen müssen, ehe wir in ihre Pforten eintreten.

Noch einmal die Molekularkräfte.

7. Um philosophische Spekulation und naturwissenschaftliches Denken nach allen Richtungen in der gebührenden Weise auseinanderzuhalten, sei noch bemerkt, dass aus den Erfolgen, welche die Maxwell'sche Theorie in der neuesten Zeit errungen hat, wieder umgekehrt in keiner Weise ein Schluss gezogen werden kann, ob die Wirkung je zweier benachbarter Moleküle auch nur bei unmittelbarer Berührung eintritt, oder ob es Kräfte giebt, die in molekulare Distanzen fernewirken. Bloss die direkte Fernwirkung in Distanzen, die gross gegenüber den Molekularentfernungen sind, wird für magnetische und elektrische Kräfte und daher wohl auch für die Gravitation unwahrscheinlich gemacht.

Wir betrachten den Galvanismus vor der Reibungselektricität.

8. Schon lange bevor Galvani das erste Mal Zuckungen eines Froschschenkels durch Elektricität bemerkt hatte, war eine grosse Zahl von Phänomenen aus dem Gebiete der sogenannten Reibungselektricität bekannt. Es erscheint uns daher beim Entwurfe einer Theorie ebenfalls am natürlichsten, von der Reibungselektricität auszugehen; aber es ist kaum zu leugnen, dass dieser Grund doch ein mehr äusserlicher ist; jedenfalls kann auch der Versuch unternommen werden, den umgekehrten Weg einzuschlagen, wie es sogar schon bei Experimental-Vorlesungen über Elektricität und Magnetismus besonders für Elektrotechniker, denen die Reibungselektricität ferner steht, versucht worden ist.

9. Wir setzen also voraus, dass wir noch nicht die mindeste Kenntniss irgend einer magnetischen oder elektrischen Erscheinung haben, am allerwenigsten etwas von einem elektrischen oder magnetischen Fluidum wissen. Da machen wir die Erfahrung, dass ein Metalldraht durch verschiedenartige Ursachen in einen eigenthümlichen auffallenden Zustand versetzt werden kann, welcher sich dadurch äussert, dass im Drahte fortwährende Wärmeproduktion stattfindet, die sich bis zum Selbstleuchten desselben steigern kann; dass er Eisenfeile festzuhalten, wenn er zerschnitten und beide Schnittflächen gleichzeitig mit unserem Körper in Berührung gebracht werden, die Nerven zu erregen vermag und vieles Andere. Wir sagen dann, in dem Drahte fliesse ein elektrischer Strom; ein Ausdruck, der aber selbstverständlich rein bildlich zu nehmen ist, da wir nicht im Mindesten an ein wirkliches Fortströmen von etwas Materiellem denken wollen.

1. Erfahrungssatz. (Existenz el. Ströme.)

10. Nur die eine Hypothese machen wir, dass irgend eine Bewegung, über deren Natur wir uns aber jeder weiteren Aussage enthalten, die Ursache dieser eigenthümlichen Erscheinung sei. Diese Bewegung, von der wir voraussetzen, dass sie den allgemeinen Gleichungen der Mechanik gehorcht, kann theilweise im Innern des stromführenden Drahtes ihren Sitz haben, theilweise muss sie sich aber auch auf das umgebende Medium (Aether, andere Körper) erstrecken, weil sonst eine scheinbare, durch das Medium übertragene Fernwirkung nicht denkbar wäre.

1. Hypothese. Mechanische Natur elektr. Ströme.

---

11. Wo in einem Systeme von Körpern eine Bewegung stattfindet, verändert sich in der Regel die räumliche Lage oder auch sonst der Zustand dieser Körper fortwährend. Hier ist dies jedoch nicht der Fall oder braucht wenigstens nicht der Fall zu sein. Drähte können Stunden, ja Tage lang von einem vollkommen unveränderlichen Strome durchflossen werden; die Lage, der Temperaturzustand, der Wärmefluss, der magnetische Zustand etwa in der Nähe befindlicher Eisenmassen, kurz alles für unsere Sinne Con-

2. Erfahrungssatz (el. Ströme sind stationär).

statirbare bleibt dabei an jedem Punkte des Raumes vollkommen unverändert.[1])

Es muss also die Bewegung, die wir uns als Ursache der beschriebenen Erscheinung denken, eine vollkommen stationäre sein, dergestalt, dass jedesmal, sobald ein Theilchen seinen Ort verlässt, immer nach verschwindend kurzer Zeit wieder ein genau gleich beschaffenes, mit derselben Geschwindigkeit nach derselben Richtung bewegtes Theilchen an dessen Stelle tritt, so dass trotz der fortwährenden Bewegung an keinem Punkte des Raumes eine Veränderung wahrnehmbar ist.

Cykeln.

12. Eine solche Bewegung nennt Helmholtz eine cyklische. Wenn alle in einem Systeme von Körpern stattfindenden Bewegungen cyklische sind, so nennt Helmholtz ein solches System ein cyklisches, oder kurz ein Cykel.

Als Beispiele derartiger Systeme seien hier angeführt: Ein fester Rotationskörper, der mit constanter Geschwindigkeit um seine Umdrehungsaxe rotirt; mehrere derartige Rotationskörper, die durch Treibriemen gekoppelt sind; eine Flüssigkeit, welche stationär einen in sich zurücklaufenden Kanal durchströmt.

Unechte Cykeln; deren Bedeutung in der Technik.

13. Räder mit Speichen oder Zähnen entsprechen unserer Definition nicht vollkommen, können aber doch als „unechte Cykeln“ bezeichnet werden, insofern die Abweichungen nur unwesentliche Dinge betreffen; ja selbst Maschinen, bei denen wie beim Kolben der Dampfmaschine hin- und hergehende, aber doch in kurzen Zeiträumen periodisch sich wiederholende Bewegungen vorkommen, dürften kaum ein von den Cykeln wesentlich abweichendes Verhalten zeigen.

Es wird daher wohl auch die noch wenig behandelte

---

[1]) Dort, wo die Entstehungsursache ihren Sitz hat, müssen freilich (mit Ausnahme der Molekularströme in permanenten Magneten) Veränderungen vor sich gehen; allein diese können so weit entfernt sein, dass sie auf den betrachteten Theil des Feldes keinen anderen Einfluss haben, als dass sie den Strom treiben; zudem können sie auch zu den später zu besprechenden langsamen Veränderungen gehören.

Mechanik der Cykeln in der praktischen Maschinenlehre von Nutzen sein. Hier aber haben wir es mit einer ganz anderen, rein theoretischen Anwendung derselben zu thun.

Allgemeine Coordinaten.

14. Ehe ich speciell auf die Mechanik der Cykeln eingehe, muss ich einige Bemerkungen über die Bewegungsgleichungen ganz beliebiger mechanischer Systeme vorausschicken. Sei ein derartiges beliebiges System von Körpern gegeben; die Lage und der Zustand aller Körper des Systems sei durch n independente Variable $l_1, l_2, \ldots\ldots l_n$ vollkommen bestimmt. Man sagte dann, das System habe n-Freiheitsgrade und bezeichnet die l als die allgemeinen Coordinaten des Systems.

So hat ein materieller Punkt einen Freiheitsgrad, wenn er ausschliesslich auf einer Linie, drei, wenn er frei im Raume beweglich ist, ein beliebig im Raume beweglicher fester Körper hat sechs Freiheitsgrade u. s. f.

Allgemeine Kräfte.

15. Wir wollen mit L die Kraft bezeichnen, welche irgend eine der Coordinaten l zu vergrössern strebt, so dass die gesammte Arbeit, welche geleistet wird, wenn jedes l um δl wächst und welche gleich dem Zuwachse δT der lebendigen Kraft T des Systemes ist, den Werth hat:

1) $$\delta A = \Sigma L \delta l.$$

Im Allgemeinen lassen sich alle Massen des Systems irgendwie mit n auf vorgeschriebenen Curven beweglichen Antriebspunkten so verbinden, dass die alleinige Bewegung je eines dieser Antriebspunkte immer der alleinigen Veränderung je einer einzigen Variablen entspricht und δl gleich dem Wege des betreffenden Antriebspunktes ist.

So können bei einem frei beweglichen materiellen Punkt dessen Projektionen auf die drei Coordinatenaxen als Antriebspunkte gewählt werden. Drei den Coordinatenebenen immer parallel bleibende Ebenen sind gezwungen, durch die drei Antriebspunkte zu gehen, der materielle Punkt selbst in jeder der drei Ebenen zu liegen. Bei einem um eine feste Axe drehbaren festen Körper ist ein Punkt des-

selben in der Entfernung eins von der Axe Antriebspunkt u. s. w.

Sollte unsere mangelhafte Kenntniss von dem Mechanismus des Systems dies nicht gestatten (wenn z. B. das System ein galvanisches Element enthielte und l die Elektricitätsmenge vorstellte, welche dasselbe seit dem Zeitanfange passirt hat), so ist der Begriff L gleich „Kraft, welche die Coordinate l zu vergrössern sucht", einfach als der Quotient $\delta A : \delta l$ zu definiren, worin δA die Arbeit darstellt, welche bei alleinigem Wachsthume der Coordinate l um δl geleistet wird. Da die Arbeit immer etwas bestimmt definirbares ist, so kann diese Definition niemals eine Zweideutigkeit involviren.

Lagrange's Bewegungsgleichungen.

16. Setzen wir voraus, dass wir es auch in diesem Falle mit mechanischen Systemen zu thun haben, welche sich den allgemeinen Gleichungen der analytischen Mechanik fügen, so können wir noch immer trotz unserer Unbekanntschaft mit dem eigentlichen Mechanismus des Systems diese allgemeinen Gleichungen anwenden, welche Lagrange in die Form gebracht hat:

$$2) \qquad L = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial l'} - \frac{\partial T}{\partial l},$$

wobei T als Funktion der n Coordinaten l und deren Differentialquotienten l' nach der Zeit t ausgedrückt zu denken ist.

$\partial T : \partial l'$ sind die Grössen, welche man die Momente zu nennen pflegt; wir wollen sie kurz mit λ bezeichnen, dem natürlich dann der Index der betreffenden Coordinate beizufügen ist.

Bezüglich des Beweises der Gleichungen 2 verweise ich auf: Lagrange, Mech. analyt., 2. Theil, 4. Section; Thomson und Tait, Treat. on nat. phil. Vol. 1, part. 2. New ed. sect. 318, Gl. 24; dass. deutsch S. 282, Gl. 15; Maxwell, Treat. on Electr. Vol. 2, 2. ed., sect. 571; Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, 8. Vorlesung, das auf Gleichung 7 folgende.

Hier will ich bloss ihre physikalische Bedeutung,

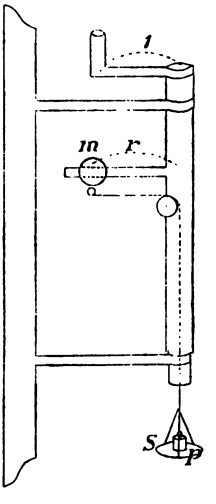
deren möglichst anschauliche Auffassung mir die Hauptsache ist, an einem speciellen Beispiele erläutern, das uns übrigens in der Folge von Nutzen sein wird.

Zweite Vorlesung.

Mechanische Analogie des zweiten Hauptsatzes der Wärmelehre.

Beispiel. 17. Sei eine cylindrische Röhre (Fig. 1) mittelst einer Kurbel um ihre vertikal stehende Axe drehbar; dieselbe trage eine auf ihrer Axe senkrechte Stange, auf welcher eine Masse m von sehr kleinem Volumen verschiebbar ist. Von einem an der Masse befestigten Haken führe eine Schnur nach der Axe, und dann über eine passend angebrachte Rolle mit der Axe zusammenfallend nach einer Schale S, auf welche ein Gewicht p aufgelegt werden kann. Alles sei reibungslos und bis auf die Masse m auch massenlos. Als allgemeine Coordinaten sollen die Entfernung r der Masse von der Axe und der Winkel l benutzt werden, um den das Rohr gegen eine gewisse Normallage verdreht erscheint. Setzen wir der Kürze halber die Winkelgeschwindigkeit $l' = w$, so ist:

Fig. 1.



$$T = \frac{mr'^2}{2} + \frac{mr^2w^2}{2}$$

$$R = mr'' - mrw^2$$

$$L = mr^2w' + 2mrr'w.$$

Befindet sich der Kurbelgriff in der Entfernung 1 von der Axe, so kann man sich die Kraft L, welche den Winkel zu vergrössern sucht, direkt an der Kurbel in tangentieller Richtung wirkend denken. Die Kraft R sucht die Entfernung r zu vergrössern.

Mechanische Analogie des zweiten Hauptsatzes.

18. Sei nun zu Anfang $L = o$ und p halte der Centrifugalkraft genau das Gleichgewicht, so dass man also hat:

$$w' = r' = o,\ p = mrw^2.$$

Hierauf wirke eine Aussenkraft L auf die Kurbel, dieselbe sei jedoch so schwach, dass w' immer sehr klein bleibt, während w einen grossen Werth hat. Durch passende Veränderung von p kann bewirkt werden, dass sich r beliebig ändert. Dies soll so geschehen, dass auch r' immer sehr klein gegenüber rw und daher auch r'' gegenüber rw^2 bleibt; dann ist immer mit grosser Annäherung:

$$p = -R = mrw^2$$
$$2T = mr^2w^2.$$

Die während der Zeit dt in das System durch die Aussenkraft L hineingesteckte Arbeit dQ wird theils auf Erhöhung der lebendigen Kraft $mr^2w^2 : 2$ des Systems, theils auf Hebung des Gewichtes p um das Stück dr verwendet. Es ist also

$$3) \qquad dQ = \frac{m}{2} d(r^2w^2) + pdr = mr^2wdw + 2mw^2rdr,$$

also:

$$4) \qquad \frac{dQ}{T} = dlognat\,(r^4w^2),$$

also gleich einem vollständigen Differentiale.

Kreisprocesse.

19. Wir können wie bei einem bekannten, mit der Centrifugalmaschine ausgeführten Schulexperimente diesen Mechanismus zur Arbeitsleistung benutzen. Wir denken uns zwei horizontale, vollkommen ebene und glatte Tischplatten; die ebenfalls eben gedachte Schale S stehe anfangs im Niveau der unteren Tischplatte und es werde ohne Arbeitsleistung ein Gewicht p von der Platte auf die Schale geschoben. Dann werde die Rotationsgeschwindigkeit durch Handhabung der Kurbel gesteigert, bis das Gewicht auf das Niveau der oberen Tischplatte gehoben ist, auf welche

es dann ohne Arbeitsleistung geschoben werden kann. Bei genügender Verminderung der Rotationsgeschwindigkeit sinkt dann die leere Schale wieder zum Niveau der unteren Tischplatte herab und es kann ein zweites Gewicht in derselben Weise gehoben werden u. s. f.

Man sieht, wie die dem Systeme zugeführte lebendige Kraft zur Arbeitsleistung benutzt werden kann. Allein in der soeben geschilderten Weise würde durch eine gegebene Zufuhr von lebendiger Kraft nicht das Maximum von Arbeit geleistet werden. Ein Maximum von Arbeitsleistung erhalten wir aber, wenn wir einen aus vier Theilprocessen bestehenden Kreisprocess in folgender Weise ausführen:

Erster Theilprocess.

20. Wir stecken durch andauernde Wirksamkeit einer kleinen Kraft L die Arbeit Q_1 in das System. Um diese in der vortheilhaftesten Weise auszunützen, wollen wir dabei von der Schale fortwährend sehr kleine Gewichte wegnehmen und so das Gewicht p fortwährend so abgleichen, dass es immer bis auf verschwindend Kleines gleich der Centrifugalkraft $-R$ ist. Der Ueberschuss der Centrifugalkraft über p und die Grösse von L soll dabei fortwährend so regulirt werden, dass die Schale in solchem Tempo steigt, dass die Hebungsarbeit immer genau gleich der hineingesteckten Arbeit ist, also die lebendige Kraft des Systems constant gleich T bleibt.

Zweiter Theilprocess.

21. Nun führen wir keine lebendige Kraft mehr zu, lassen aber die Schale noch fortwährend steigen, was durch sehr langsame Verminderung ihrer Belastung zu bewirken ist. Diese ist wieder so zu reguliren, dass p immer nur unendlich wenig hinter der Centrifugalkraft zurückbleibt. Da noch fortwährend Arbeit geleistet, aber keine mehr zugeführt wird, so muss dies auf Kosten der im Systeme enthaltenen lebendigen Kraft geschehen. Diese muss daher abnehmen und

$$p = 2T : r$$

muss, gleiche Zunahme von r vorausgesetzt, rascher wie früher abnehmen, da jetzt sowohl T abnimmt als auch r zunimmt. Dieser zweite Theilprocess soll fortgesetzt werden,

bis die lebendige Kraft des Systems auf den Wert T_o gesunken ist.

Dritter Theilprocess.

22. Durch Hemmung der Kurbel mittelst einer sehr geringen Kraft soll nun dem Systeme Arbeit entzogen werden. Dabei soll die Grösse der hemmenden Kraft und der Ueberschuss des Gewichtes p über die Centrifugalkraft (letzterer durch stetes Auflegen kleiner Gewichte) immer so regulirt werden, dass erstens beide unendlich klein bleiben und zweitens die Schale sich in solchem Tempo senkt, dass die hierdurch gewonnene Arbeit die lebendige Kraft des Systems constant erhält. Wir haben also für diesen dritten Theilprocess wieder $2T = mr^2w^2 = 2T_o = \text{const.}$ Wie lange dieser dritte Theilprocess fortzusetzen ist, finden wir am leichtesten in folgender Weise: Wir construiren auf dem Papiere eine Abscissenaxe OR, und eine Ordinatenaxe OW. Auf der ersteren tragen wir die Werthe des r, auf der letzteren die des w auf. Der Zustand des Systems, von welchem wir im ersten Theilprocesse ausgingen, ist dann durch einen bestimmten Punkt, etwa P, dargestellt; der ganze erste Process durch ein Stück einer von P ausgehenden gleichseitigen Hyperbel; der zweite Process durch ein Stück einer Curve, deren Gleichung $r^2w = \text{const.}$ ist, die sich also rascher als die gleichseitige Hyperbel asymptotisch der Abscissenaxe nähert. Der dritte Process ist wieder durch ein Stück einer gleichseitigen Hyperbel dargestellt. Wir ziehen nun durch P eine Curve mit der Gleichung $r^2w = \text{const.}$; wo selbe die zuletzt erwähnte gleichseitige Hyperbel trifft, hat der dritte Theilprocess zu enden.

Der gesammte Arbeitsbetrag, der dem Systeme während desselben entzogen wurde, sei Q_o.

Vierter Theilprocess.

23. Nun wirke auf die Kurbel, wie beim zweiten Theilprocesse, keine Kraft; die Schale sinke langsam weiter und die lebendige Kraft nehme zu, bis der Ausgangszustand des Systems, also der Punkt P, wieder erreicht ist. Folgendes Schema giebt eine Uebersicht über den gesammten Process:

Nr. des Theilproc.	dessen charakt. Gleichung	zugeführte Arbeit	$T = \frac{m r^2 w^2}{2}$	r	$p = \frac{2T}{r}$
1.	$r^2 w^2 = \text{const.}$	Q_1	$\text{const.} = T_1$	nimmt zu	nimmt ab
2.	$r^2 w = \text{const.}$	Null	nimmt ab	nimmt zu	n. bei gleichem Wachsth. von r rascher ab
3.	$r^2 w^2 = \text{const.}$	$-Q_0$	$\text{const.} = T_0$	nimmt ab	nimmt zu
4.	$r^2 w = \text{const.}$	Null	nimmt zu	nimmt ab	nimmt rascher zu.

Berechnung der geleisteten Arbeit.

24. Während aller vier Processe zusammen wurden theils Gewichte gehoben, theils wieder gesenkt; da aber der erstere Vorgang durchschnittlich bei grösserer Centrifugalkraft vor sich ging als der letztere, so wurden im Ganzen mehr Gewichte gehoben als gesenkt, daher Arbeit geleistet. Die im Ganzen geleistete Arbeit ist, da wir es mit einem Kreisprocesse zu thun haben, $Q_1 - Q_0$. Nun sahen wir aber, dass $dQ : T$ ein vollständiges Differential ist, integriren wir dieses über alle vier Theilprocesse, so ergiebt sich:

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_0}{T_0} = \frac{Q_1 - Q_0}{T_1 - T_0}.$$

Wir brauchen nur statt r zu sagen „Volum", statt p „Druck", statt T „Temperatur", statt Q „zugeführte Wärme", so haben wir den Carnot'schen Process.

Nicht umkehrbare Kreisprocesse.

25. Die Analogie geht natürlich noch weiter. Es wird z. B. niemals exakt $p = m r w^2$ sein können, da ja sonst die Wagschale niemals in Bewegung kommen könnte, vielmehr muss, wenn r zunehmen soll, p kleiner, wenn es abnehmen soll, grösser als die Centrifugalkraft sein. Setzen wir daher

$$p = m r w^2 - \varepsilon,$$

so muss ε immer mit dr gleich bezeichnet sein. Man erhält also genauer an Stelle der Formeln 3 und 4 die folgende

$$\frac{dQ}{T} = d \log \text{nat}\,(r^4 w^2) - \frac{\varepsilon\, dr}{T}.$$

Da nun sowohl T als auch das Produkt εdr immer positiv

ist, so liefert $dQ : T$ über einen geschlossenen Prozess integrirt allezeit etwas Negatives.

Freilich würde sich das hier geschilderte System nur mit einem Gase decken, für welches das Verhältniss der Wärmecapacitäten gleich 3 wäre, was einträte, wenn sich die Moleküle desselben statt im Raume nur in einer Geraden bewegen würden, an deren beiden Enden die Druckkraft p wirkte; auch würde die Labilität des Gleichgewichtes stören, was aber durch Gebrauch von Federspannungen an Stelle des hier der Einfachheit halber angewandten Zuges von Gewichten vermieden werden könnte. Ich kann selbstverständlich hierauf nicht weiter eingehen und muss auf die zahlreichen einschlägigen Arbeiten von Rankine, Helmholtz, Clausius, mir und Anderen verweisen, welche ziemlich vollständig zusammengestellt sind in meiner Abhandlung Gött. Nachrichten vom 24. April 1886. Vgl. auch Kronecker's Journal Bd. 98 S. 68 und Bd. 100 S. 201.

Die Theorien sind blosse Bilder der Naturprocesse.

26. Diese Digression geschah übrigens nicht bloss in der Absicht, die allgemeinen Lagrange'schen Gleichungen an einem Beispiele zu erläutern, sondern sie sollte auch noch das Wesen der Theorien, mit denen wir uns jetzt beschäftigen, überhaupt klar legen.

Diese Theorien beanspruchen keineswegs von Hypothesen auszugehen, welche sich mit der wahren Beschaffenheit der die Natur aufbauenden Urelemente und Urkräfte vollkommen decken, sondern bloss von Mechanismen, deren Wirkung mit dem Spiele der Naturerscheinungen in der einen oder anderen Beziehung eine grosse Analogie haben. Je umfassender und schlagender diese Analogie, desto brauchbarer natürlich auch der betreffende Mechanismus. In diesem Sinne ist der Ausdruck Maxwell's dynamical illustration [1]) zu verstehen.

Verzichten wir daher auch einerseits auf Constructionen, die sich vollkommen mit der Natur decken, so haben wir

---

[1]) Maxwell, *A dynamical theorie of the electromagnetic field.* Scient. pap. vol. I, pag. 537. Roy. Soc. tr. vol. 55. 1865.

andererseits wieder den Vortheil, mit klar definirten mechanischen Systemen zu operiren, deren Gebrauch namentlich von grossem heuristischen Werthe ist, wie gerade die Maxwell'sche Elektricitätstheorie beweist. Die Mechanismen werden in späteren Zeiten wohl durch brauchbarere ersetzt werden, aber das durch sie zur Anschauung gebrachte Allgemeine, ihnen und den Naturvorgängen Gemeinsame wird auch in jeder späteren Theorie bestehen bleiben.

Beim Lichte betrachtet ist unser Standpunkt vielleicht nicht einmal so wesentlich von dem der alten Theorien verschieden. Ein aus elastischen Kugeln zusammengesetztes Gas, ein sechseckiger oder tetraedrischer Benzolkern sind doch wohl auch mechanische Analogien, dynamische Illustrationen. Der Unterschied besteht vielleicht nur darin, dass wir uns des sinnbildlichen Charakters unserer Theorie klarer bewusst sind.

Dritte Vorlesung.

Bewegungsgleichungen für Cykeln; Beispiele.

Specialisirung der Gleichungen 2.

27. Wir wollen jetzt nachsehen, wie sich die allgemeinen Gleichungen 2 modificiren, wenn wir speciell voraussetzen, dass das betrachtete System ein cyklisches sei. Das Charakteristische jeder cyklischen Bewegung besteht darin, dass an Stelle jedes Theilchens, das seinen Ort verlässt, sogleich ein gleichbeschaffenes, gleichbewegtes tritt, so dass sich der Zustand des Systems während der Bewegung in keiner Weise verändert.

Cyklische Coordinaten.

28. Wir bezeichnen l als eine cyklische Coordinate, wenn deren Veränderung eine derartige cyklische Bewegung darstellt; wenn also während der Veränderung von l der ganze Zustand des Systems, daher auch jedenfalls die in demselben enthaltene lebendige Kraft keinerlei Aenderung erleidet. Daraus ist zu schliessen, dass, wenn l eine cyklische Coordinate ist, der Werth von T nicht Funktion von

l sein darf; wohl aber kann und wird er im Allgemeinen l' enthalten, da ja die lebendige Kraft um so grösser sein wird, je rascher die cyklische Bewegung vor sich geht.

Der Zustand eines Cykels kann im Allgemeinen durch eine beliebige Anzahl solcher cyklischer Coordinaten bestimmt sein. Wären sonst gar keine Coordinaten vorhanden, so könnte der Zustand des Systems überhaupt gar nicht in einen anderen übergehen, da er sich bei keiner Veränderung irgend einer cyklischen Coordinate verändern darf.

Langsam veränderliche Coordinaten.

29. Ausser den cyklischen Coordinaten soll also der Zustand des Systems noch durch andere bestimmt sein, welche Helmholtz die langsam veränderlichen Coordinaten oder kurz die Parameter nennt, da sie eine Aehnlichkeit mit den bei der Methode der Variation der Constanten, bei Aufsuchung der einhüllenden etc. vorkommenden veränderlichen Parametern haben. Diese Parameter haben nicht die Eigenschaft der cyklischen Coordinaten, dafür aber sollen sie sich so ausserordentlich langsam verändern, dass ihre Differentialquotienten nach der Zeit vernachlässigt werden können; dass also, wenn man diese Parameter mit k bezeichnet, die lebendige Kraft zwar die k selbst, aber nicht deren Ableitungen nach der Zeit k' enthält.

30. Man kann daher schreiben:

Der Zustand ist Funktion von k und l'.

$$5) \qquad T = f(k, l').$$

Es ist eine weitere Folge der langsamen Veränderlichkeit der k, dass während eines längeren Zeitraumes die k als constant betrachtet werden können, so dass während dieses Zeitraumes die Bewegung als eine cyklische betrachtet werden darf; erst nach längerer Zeit nehmen die k allmählich andere Werthe an, so dass die Bewegung jetzt wieder eine cyklische ist, aber mit etwas veränderten Werthen der Parameter. Während also die l' gross sind, so sind die l'' klein von derselben Ordnung, wie die k'.

Als Erläuterung möge das in der vorigen Vorlesung behandelte Beispiel gelten. Da war l eine cyklische Coordinate, bei deren rascher Veränderung sich der Zustand des Systems nicht ändert; r dagegen wurde als langsam veränderlicher Parameter vorausgesetzt, so dass die Ge-

schwindigkeit r' verschwindet, aber die cyklische Rotationsbewegung des Systems bald bei kleineren, bald bei grösseren Distanzen der Masse m von der Drehungsaxe vor sich geht. T war Funktion von l' und r. In ganz analoger Weise denken wir uns, dass auch die Volumveränderungen warmer Körper sehr langsam gegenüber der Molekularbewegung, welche wir Wärme nennen, die sichtbaren Bewegungen der Stromleiter und Magnete sehr langsam gegenüber den Bewegungen, welche wir Elektricität nennen, vor sich gehen.

Bewegungsgleichungen für Cykeln.

31. Wir können jetzt ein Cykel auch definiren, als ein solches System, welches keine anderen als cyklische und langsam veränderliche Coordinaten enthält, und erhalten mit Rücksicht auf die Gleichung 5 aus unseren allgemeinen Bewegungsgleichungen 2 für Cykeln die nachfolgenden Bewegungsgleichungen:

$$6) \qquad K = -\frac{\partial T}{\partial k}, \; L = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial l'},$$

worin K und L in oben definirtem Sinne die Kräfte sind, welche einestheils die langsam veränderlichen Coordinaten k, anderentheils die cyklischen Coordinaten l zu vergrössern streben.

Sind alle eingeführten Vernachlässigungen begründet?

32. Da bei der partiellen Differentiation die Grössenordnung der Glieder im Allgemeinen verändert wird, so können Zweifel entstehen, ob nicht hierbei Glieder von derselben Grössenordnung wie die Ausschlaggebenden vernachlässigt worden sind; daher scheinen die folgenden Betrachtungen zur Zerstreuung derartiger Zweifel nicht ganz überflüssig.

Wir nehmen an, die langsame Veränderlichkeit jedes der k soll dadurch ausdrückbar sein, dass wir $k = f(\varepsilon . t)$ setzen, wobei $f(x)$ eine sammt ihren Ableitungen endliche Funktion des endlichen Argumentes x, ε aber eine sehr kleine Grösse ist. In gleicher Weise soll die langsame Veränderlichkeit von l' dadurch ausdrückbar sein, dass $l' = g(\zeta . t)$ gesetzt wird, wobei g und ζ dieselben Eigenschaften wie f

und ε haben. Natürlich ist dann l selbst sehr gross, was aber nicht schadet, da l selbst in den Gleichungen nirgends vorkommt.

T ist eine homogene Funktion zweiten Grades von k' und l', deren Coëfficienten bloss Funktionen der k sind. Es soll Ak'^2 ein Glied repräsentiren, welches das Quadrat eines k' oder ein Produkt zweier k' enthält. In gleicher Weise sei Cl'^2 ein Glied, welches ebenso bezüglich l beschaffen ist, und endlich $Bk'l'$ ein Glied, welches ein Produkt eines k' und eines l' enthält. Die Coëfficienten A, B, C sind Funktionen der k und sollen endlich sein, sowie auch ihre partiellen Ableitungen nach diesen Grössen, welche wir symbolisch durch A', B' . . . ausdrücken. Der vollständige Ausdruck für K wäre:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{dk'} - \frac{\partial T}{dk}.$$

Wir bezeichnen den ersten Addenden dieses Ausdrucks mit I, den zweiten mit II. Solche Glieder, welche die Differentiation von:

$$Ak'^2,\ Bk'l' \text{ oder } Cl'^2$$

in I liefert, sollen mit I_a, I_b resp. I_c bezeichnet werden und analoge Bedeutungen sollen II_a, II_b, II_c haben.

Dann ist, wenn man Glieder von gleicher Grössenordnung der Kürze halber einfach einander gleichsetzt:

$$I_a = \frac{d(Ak')}{dt} = k'^2 A' + k' A = \varepsilon^2,$$

wobei die letzte Gleichung lediglich ausdrücken soll, dass beide Glieder von der Grössenordnung ε^2 sind. Ebenso ergiebt sich

$$II_a = A' k'^2 = \varepsilon^2,$$
$$I_b = B' k' l' + B l' = \varepsilon + \zeta,$$
$$II_b = B' k' l' = \varepsilon,\ I_c = o,$$

wogegen $II_c = C' l'^2$ endlich ist, welches Glied eben allein den in Gleichung 6 vorkommenden Werth für K liefert. Da das undifferentiirte l nirgends vorkommt, so ist

$$L = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial l'}.$$

Die Glieder von der Form Ak'^2 liefern in diesen Ausdruck nichts, ein Glied von der Form $Bk'l'$ soll III_b, ein Glied

von der Form Cl'^2 aber III_c liefern, dann ist, wenn wieder das Gleichheitszeichen nur Gleichheit der Grössenordnung ausdrückt,

$$III_b = Bk'' + B'k'^2 = \varepsilon^2$$
$$III_c = C'k'l' + Cl'' = \varepsilon + \zeta.$$

Es ist also L unendlich klein, wie vorauszusehen war und alle anderen Glieder verschwinden unter allen Umständen gegenüber III_c, welches gerade auch die in Gleichung 6 aufgenommenen Glieder darstellt.

Die sowohl k' als l' enthaltenden Glieder würden zu ganz eigenthümlichen, bisher noch nicht entdeckten Erscheinungen Veranlassung geben, denen Maxwell in seinem Treat. on Electr. 2. Edit. Vol. 2, sect. 574, deutsch pag. 263, eine längere Betrachtung widmet.

Monocykeln.

33. Der einfachste Fall ist der, dass nur eine einzige cyklische Coordinate vorhanden ist. Es ist dann die Lage sämmtlicher Theile des Systems, abgesehen von den langsam veränderlichen Coordinaten, nur noch durch die Lage eines einzigen Antriebspunktes bestimmt, welche wiederum durch eine einzige cyklische Coordinate l definirt ist. Ruht der Angriffspunkt, so ruhen alle Theile des Systems; bewegt er sich mit einer gegebenen Geschwindigkeit l', so sind dadurch die Bewegungen aller Massen des Systems bestimmt. Natürlich sind dabei immer die Werthe der langsam veränderlichen Parameter als gegeben vorausgesetzt, welche ja stets während einer langdauernden Bewegung des Systems als constant betrachtet werden können.

Das System, welches wir betrachten, kann dabei aus beliebig vielen beliebig miteinander und mit dem Antriebspunkte verbundenen Massentheilchen $m_1, m_2, \ldots m_p$ bestehen. Wir sahen, dass die lebendige Kraft T des Systems nur Funktion von l' und den Parametern k sein kann. Behält jedes Massentheilchen während seiner ganzen Bewegung denselben Bewegungszustand, so werden auch die

Geschwindigkeiten v_1, $v_2 \ldots v_p$ der einzelnen Massentheilchen nur Funktionen von l' und k sein. Nimmt ein bestimmtes Massentheilchen, während es fortwandert, verschiedene Geschwindigkeiten an, so ist doch jedenfalls die Geschwindigkeit, die an einer bestimmten Stelle des Raumes herrscht, nur Funktion von l' und k, was bei Berechnung von T auf dasselbe herauskommt, da ja T eine über alle Massentheilchen zu erstreckende Summe ist.

Im Folgenden soll niemals in den Fällen, wo Parameter vermittelst gewisser Bedingungsgleichungen eliminirt werden könnten, z. B. vermittelst der Bedingung, dass auf sie niemals eine Kraft wirkt[1]), diese Elimination vorgenommen werden, sondern sämmtliche langsam veränderliche Parameter und auch die darauf wirkenden Kräfte sollen, selbst wenn letztere immer gleich 0 sind, in den Gleichungen belassen werden; dann sind Fälle kaum denkbar, wo die Geschwindigkeiten v, andere als lineare Funktionen der Geschwindigkeiten l' sind, was natürlich ebenso für die später zu betrachtenden Fälle gilt, wo mehrere cyklische Coordinaten vorhanden sind.

Es scheint, dass die Voraussetzung jeder anderen nicht linearen Abhängigkeit zu mechanischen Ungereimtheiten führen würde. Sollte aber später doch einmal die Möglichkeit von Bewegungen entdeckt werden, wobei die v nicht lineare Funktionen der l' sind, so setzen wir jedenfalls voraus, dass die Bewegungen, welche zu den magnetischen und elektrischen Erscheinungen Veranlassung geben, nicht in diese noch ganz hypothetische Kategorie von Bewegungen gehören. Mit einem Worte, wir setzen:

2. Hypothese: Die v sind lineare Funktionen der l'.

$$v_i = a_i l', \quad (i = 1, 2 \ldots p)$$

$$T = \frac{l'^2}{2} \sum_{i=1}^{i=p} m_i a_i^2 = \frac{A}{2} l'^2,$$

wobei die Coëfficienten a selbstverständlich Funktionen der langsam veränderlichen Parameter k sind. Die Gleichung 6 liefert dann:

[1]) v. Helmholtz, Principien der Statik monocyklischer Systeme. Kroneker's Journal Bd. 97 S. 132.

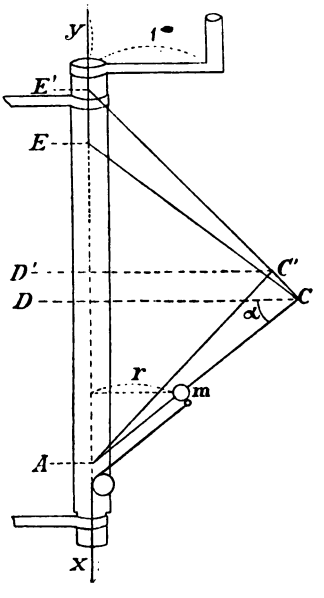
7) $$L = \frac{d(Al')}{dt}, \quad K_h = -\frac{l'^2}{2}\frac{\partial A}{\partial k_h} \quad (h = 1, 2 \ldots n).$$

Beispiele von Monocykeln.

34. Um sich die wahre Bedeutung dieser Gleichungen möglichst zu veranschaulichen, empfehle ich die Anwendung auf Beispiele und deute hier nur einige Verallgemeinerungen des in der zweiten Vorlesung gegebenen Beispieles kurz an.

Die an dem rotirenden Rohre befestigte Seitenstange der Fig. 1 Art. 17, (AC in Fig. 2) sei nicht fest, sondern durch ein Gelenk A mit dem Rohre verbunden. Aehnlich sei eine zweite gleich lange Stange CE durch ein Gelenk E mit einer in der Axe der Röhre verschiebbaren dritten Stange verbunden. Die beiden anderen Enden der ersten und zweiten Stange endlich seien wieder durch ein Gelenk C mit einander verbunden (s. Fig. 2).

Fig. 2.



Von der dritten Stange rage das Stück y aus dem Rohre hervor. Auf der ersten Stange gleite die Masse m, durch einen Faden wie in Fig. 1 gehalten, von dem ein Stück x aus dem Rohre herausragt. Hier ist wieder die Kurbel der Antriebspunkt. Die Winkeldrehung, oder, wenn man will, der Weg l der Kurbel, ist die cyklische Coordinate, x, y sind die Parameter. Wir setzen voraus, dass die fixen Bestandtheile ein Trägheitsmoment J haben, während das des Fadens und der beweglichen Stangen verschwindet, sowie dass sich die Parameter x, y genügend langsam ändern. Dann ist:

$T = \frac{l'^2}{2}\left(J + mr^2\right)$, $L = \frac{d}{dt}\left[(J + mr^2)l'\right]$, da $A = J + mr^2$ ist.

Die Kräfte, welche den Faden und die Stange aus der Röhre herauszuziehen suchen, sind:

$$X = -mrl'^2\frac{\partial r}{\partial x},\quad Y = -mrl'^2\frac{\partial r}{dy}.$$

Bildet die erste und zweite Stange den Winkel 2α, so ist $\partial r : \partial x = -\cos\alpha$. Verschiebt sich das an die dritte Stange stossende Ende E der zweiten Stange um $EE' = \partial y$, so verschiebt sich die Projection D ihres anderen Endes C auf die Axe um $DD' = \partial y : 2$, der Punkt C um $CC' = \partial y : 2\cos\alpha$; der Mittelpunkt B der Masse M um $BB' = CC'.(\lambda - x) : \lambda = (\lambda - x)\,\partial y : 2\lambda\cos\alpha$, und die Entfernung r der Masse m von der Stange wächst um $\delta r = -BB'\sin\alpha = -(\lambda - x)tg\alpha\partial y : 2\lambda$, wobei λ die Länge der ersten Stange ist, welche ebensogross wie die der zweiten Stange sein soll. Der Faden soll eine solche Gesammtlänge haben, dass sich für $x = o$ die Masse m in C befindet.

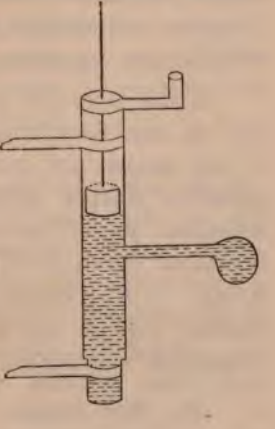
Da ausserdem $r = (\lambda - x)\cos\alpha$ ist, so erhält man:

$$X = ml'^2(\lambda - x)\cos^2\alpha,\quad Y = \frac{ml'^2}{2\lambda}(\lambda - x)^2\sin\alpha.$$

Um noch einen Fall zu betrachten, wo auch m veränderlich ist, communicire mit der vertikalen Röhre eine enge horizontale Röhre, und diese am Ende mit einem schlaffen Ballon. Die vertikale Röhre sei unten zu, oben mit einem verschiebbaren Kolben vom Flächeninhalte f verschlossen, dessen Stiel um das Stück x aus ihr hervorragt. Sie wie die horizontale Röhre und der Ballon seien mit einer incompressiblen Flüssigkeit von der Dichte ϱ gefüllt. (Siehe Fig. 3.) Dann ist $\partial m = -\varrho f\partial x$, daher die Kraft X, welche x zu vergrössern strebt:

$$X = -\frac{r^2l'^2}{2}\frac{\partial m}{\partial x} = \frac{\varrho f r^2 l'^2}{2}.$$

Fig. 3.



Ein elektrischer Strom ist ein Monocykel.

35. Eine derartige monocyklische Bewegung, deren Intensität durch die Ableitung einer einzigen Variablen nach der Zeit vollkommen bestimmt ist, ist nach Maxwell ein in einem Drahte cirkulirender elektrischer Strom. l' misst die Geschwindigkeit der Bewegung, wird also jedenfalls mit wachsender Stromintensität wachsen; L ist die Kraft, welche die monocyklische Bewegung antreibt, wächst also mit wachsender elektromotorischer Kraft. Die Bewegung findet theilweise im umgebenden Aether, möglicherweise auch in umgebenden Eisenmassen etc. statt. Diese Bewegung in der Umgebung ändert sich, wenn der Draht seine Gestalt, die umgebenden Eisenmassen etc. ihre Lage ändern und zwar sollen k die Parameter sein, welche die Gestalt, Lage des Drahtes, der Eisenmassen etc. bestimmen.

Die Geschwindigkeit eines jeden im Drahte oder in der Umgebung befindlichen ponderablen oder inponderablen Massentheilchens (resp. die Geschwindigkeit an einer bestimmten Stelle, durch welche Massentheilchen hindurchwandern), soll proportional l' sein. Der Proportionalitätsfaktor aber wird von der Gestalt des Drahtes und der Lage der umgebenden Körper, also von dem Werthe der Parameter k abhängen. Die K sind die Kräfte, welche von aussen auf das System wirken müssen, um die Werthe von l' und diesen Parametern constant, respektive gerade in der Weise langsam veränderlich zu machen, dass k' und l'' die in den Gleichungen angeführten Werthe haben.

K sind also die ponderomotorischen Kräfte, welche bei den in den Gleichungen enthaltenen Werthen von k' und l'' von aussen auf den stromführenden Draht und die umgebenden Körper wirken müssen, $-K$ die Kräfte, welche scheinbar durch die cyklische Bewegung (wie die Centrifugalkraft durch die Kreisbewegung) erzeugt und denen die Kräfte $+K$ (Centripetalkraft) das Gleichgewicht halten. Ebenso sind L die Kräfte, welche unter denselben Bedingungen von aussen wirken müssen.

Bewegungshindernisse.

36. Wir setzten bisher das System als frei von Bewegungshindernissen voraus. Damit es einem elektrischen

Strome vollkommen analog werde, müssen wir auch solche einführen.

Bewegungshindernisse, welche sich der Veränderung der k entgegenstellen würden, wären etwa Reibung der Drahtstücke der Stromleitung oder benachbarter Eisenkörper bei einer sichtbaren Bewegung derselben und Aehnliches, wären also in die K einzubeziehen. Solche dagegen, welche der cyklischen Bewegung entgegenwirken und deren Gesammtbetrag wir mit W bezeichnen wollen, müssen explicit in die Gleichungen eingeführt werden.

Sei L_o die Kraft, welche thätig sein musste, wenn die Bewegungshindernisse fehlten und welche also durch Gleichung 6 bestimmt ist, L_m aber die bei Thätigkeit der Bewegungshindernisse nothwendige Kraft; so ist:

$$L_m = L_o + W = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial l'} + W.$$

Wenn man daher wieder den Index m weglässt, so erhält man beim Vorhandensein der Bewegungshindernisse an Stelle der Gleichung 6 die folgende:

8) $$L = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial l'} + W.$$

Bleibt die Stromintensität, die Gestalt des Drahtes und die Lage der umgebenden Massen, also l' und $\partial T : \partial l'$ constant, so ist daher $L = W$. Dann wird aber die elektromotorische Kraft durch das Ohm'sche Gesetz bestimmt.

Würden wir also voraussetzen, dass L einfach der elektromotorischen Kraft, l' der Stromstärke proportional ist, so müsste, um der Erfahrung zu genügen:

$$W = l' \times \text{const.}$$

gesetzt werden. Wir müssten also annehmen, dass die Gegenkraft der Bewegungshindernisse der Geschwindigkeit der Bewegung, also der Stromstärke proportional ist. Obige Annahme ist zwar die einfachste, über ihre Berechtigung kann aber nur durch Zuziehung weiterer Erfahrungsthatsachen entschieden werden, welche am passendsten der Wechselwirkung zweier elektrischer Ströme entnommen werden.

Vierte Vorlesung.

Bicykel. Absolute Strommessung.

Bicykeln.

37. Sei nun ein System gegeben, das aus beliebig vielen Massentheilchen m_1, $m_2 \ldots m_p$ mit den Geschwindigkeiten v_1, $v_2 \ldots v_p$ besteht. Die Position jedes Massentheilchens sei durch beliebig viele langsam veränderliche Parameter k_1, $k_2 \ldots k_n$ und durch zwei cyklische Coordinaten l_1, l_2 bestimmt, deren Ableitungen nach der Zeit wir mit l'_1 und l'_2 bezeichnen.

Es sei wieder:

9) $$v_i = a_i l'_1 + b_i l'_2, \quad (i = 1, 2 \ldots p)$$

(v_i bezeichnet eventuell die Geschwindigkeit an einer bestimmten Stelle des Raumes, wo fortwährend Massentheilchen m_i passiren). Setzt man daher:

10) $$A = \sum_{i=1}^{i=p} m_i a_i^2, \; B = \sum_{i=1}^{i=p} m_i b_i^2, \; C = \sum_{i=1}^{i=p} m_i a_i b_i,$$

so wird

11) $$T = \frac{A}{2} l'^2_1 + \frac{B}{2} l'^2_2 + C l'_1 l'_2.$$

Die Momente sind:

$$\lambda_1 = \frac{\partial T}{\partial l'} = A l'_1 + C l'_2, \; \lambda_2 = \frac{\partial T}{\partial l'_2} = C l'_1 + B l'_2,$$

und man erhält die Bewegungsgleichungen:

12) $$\begin{cases} L_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A l'_1 + C l'_2\right) + W_1 \\ L_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(C l'_1 + B l'_2\right) + W_2 \\ K = -\frac{\partial T}{\partial k} = -\frac{l'^2_1}{2}\frac{\partial A}{\partial k} - \frac{l'^2_2}{2}\frac{\partial B}{\partial k} - l'_1 l'_2 \frac{\partial C}{\partial k}. \end{cases}$$

Hier sind die L die Kräfte, welche die beiden cyklischen Coordinaten zu vergrössern suchen, K dagegen die Kräfte, welche irgend einen der Parameter k zu vergrössern streben. W_1 und W_2 aber ist der Gesammtbetrag der Bewegungshinder-

nisse, welche bei Veränderung der ersten, resp. der zweiten cyklischen Coordinate auftreten. Es wird vorausgesetzt, dass der Mechanismus, welcher die Bewegung von den Antriebspunkten auf die einzelnen Massen überträgt, ohne Bewegungshindernisse ist und nur die Bewegung der Antriebspunkte selbst solche erfährt, so dass W_1 bloss Funktion der Bewegung des ersten, W_2 des zweiten Antriebspunktes ist, nicht aber die Bewegung des ersten Antriebspunktes auch auf W_2 von Einfluss ist, oder umgekehrt.

Beispiele von Bicykeln.

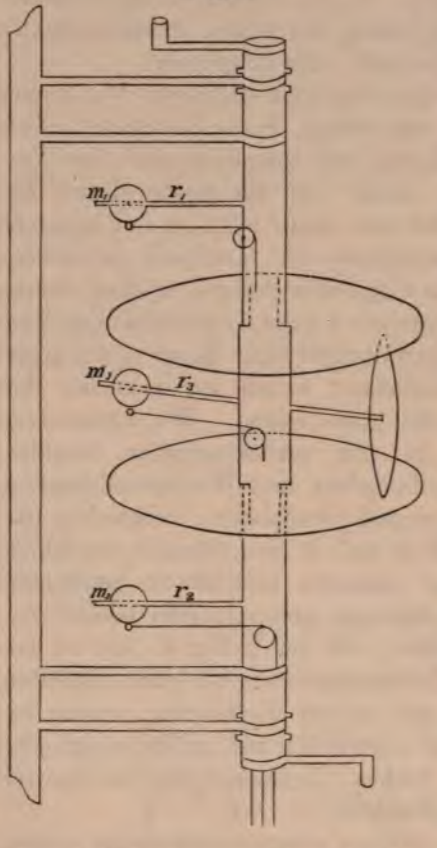
38. Diese Gleichungen sind ganz allgemein. Wie immer die Massen beschaffen sein mögen, deren Bewegung uns als elektrischer Strom erscheint, wie complicirt auch ihre Verbindungen seien, wie immer der Charakter dieser Bewegungen selbst gestaltet sein mag: wenn es nur cyklische sind, die den Grundprincipien der Mechanik gehorchen; jedes Mal müssen sie die obigen Gleichungen erfüllen, welche ja eine unmittelbare Consequenz jener Grundprincipien sind. Doch um uns den physikalischen Sinn dieser Gleichungen möglichst zu veranschaulichen, wollen wir zunächst ihre Anwendung auf specielle Fälle zeigen. Wir könnten da Flüssigkeitsströme in in sich zurücklaufenden Kanälen, Prozesse, wo stete Verdampfung und Wiedercondensation, chemische Verbindungen und Dissociation, Elektrolyse etc. stattfindet, wählen. Doch wird es sich offenbar empfehlen, zuvörderst ein denkbar einfaches Beispiel zu betrachten. Zwei von einander unabhängige nebeneinanderstehende Apparate, jeder so beschaffen, wie der in Fig. 1, Art. 17 dargestellte, würden den Bedingungen, die wir jetzt aufstellten, genügen; allein da würden gerade die Glieder, welche das Zusammenwirken beider ausdrücken und auf die es uns jetzt am meisten ankommt, fehlen. Deshalb wollen wir das folgende ideale Modell betrachten.

Idealer Mechanismus.

39. Drei coaxiale Röhren sollen übereinander stehen; passende Verjüngungen der mittleren sollen ein klein wenig in die oberste und unterste hineinragen und darin reibungslos drehbar sein, während die oberste und unterste so getragen werden, dass sie keiner anderen Bewegung als einer Drehung um ihre Axe fähig sind (vgl.

Fig. 4). Jede der drei Röhren trage eine Masse, m_1 zu oberst, m_2 zu unterst, m_3 in der Mitte, welche genau wie die Masse der Fig. 1 Art. 17 beweglich und von einem Faden gezogen ist. Alle drei Fäden ragen aus der untersten Röhre hervor. Die Distanzen der Massen von der Axe seien r_1, r_3, r_2.

Fig. 4.



Die oberste und unterste Röhre sollen genau wie die Röhre der Fig. 1 durch eine Kurbel drehbar sein. Das mittlere Rohr aber soll mit ihnen in der folgenden Weise verbunden sein: Das oberste und unterste Rohr tragen je eine zu ihrer Axe senkrechte Scheibe, das mittlere aber eine zu seiner Axe senkrechte Stange, an welcher eine zur Stange senkrechte Scheibe drehbar befestigt ist, die die beiden anderen Scheiben berührt und darauf ohne Reibung und Gleitung rollt. Die Abhängigkeit der Bewegung des mittleren Rohres von den beiden anderen findet man leicht durch folgende Ueberlegung: Wenn das obere und untere Rohr beide um den gleichen Winkel im selben Sinne gedreht werden, so dreht sich dabei auch das mittlere Rohr im selben Sinne um den gleichen Winkel, die dritte Scheibe jedoch dreht sich dabei gar nicht. Wird dagegen das obere und untere

Rohr um den gleichen Winkel im engegengesetzten Sinne gedreht, so dreht sich die mittlere Scheibe, aber ihr Mittelpunkt und daher auch das mittlere Rohr bewegt sich nicht. Wird daher das obere Rohr um einen beliebigen Winkel l_1, das untere im gleichen Sinne um einen beliebigen anderen Winkel l_2 gedreht, so kann man sich die Sache immer so vorstellen, als ob zuerst beide Rohre im selben Sinne um den Winkel $(l_1 + l_2) : 2$, hernach aber das obere wieder im selben Sinne um den Winkel $(l_1 - l_2) : 2$, das untere dagegen im entgegengesetzten Sinne um denselben Winkel $(l_1 - l_2) : 2$ gedreht worden wäre. Nur der erstere Process dreht das mittlere Rohr und zwar um den Winkel $(l_1 + l_2) : 2$. Es ist also die Drehung und daher auch die Winkelgeschwindigkeit des mittleren Rohres immer das arithmetische Mittel aus der der beiden anderen.

Gleichungen für denselben.

Wird also alles Uebrige als massenlos vorausgesetzt, so besteht das System nur aus drei Massen m_1, m_2, m_3, und ist durch die beiden cyklischen Coordinaten l_1, l_2 und die drei langsam veränderlichen Parameter r_1, r_2, r_3 vollkommen bestimmt. Die Geschwindigkeiten der Massen sind:

$$v_1 = r_1 l'_1,\ v_2 = r_2 l'_2,\ v_3 = \frac{r_3}{2} l'_1 + \frac{r_3}{2} l'_2.$$

Es ist also in Formel 9 und 10 zu setzen:

$$a_1 = r_1,\ a_2 = b_1 = o,\ b_2 = r_2,\ a_3 = b_3 = r_3 : 2,$$

was liefert:

$$A = m_1 r_1^2 + \frac{m_3 r_3^2}{4},\ B = m_2 r_2^2 + \frac{m_3 r_3^2}{4},\ C = \frac{m_3 r_3^2}{4},$$

oder wenn man noch behufs möglichster Vereinfachung der Formeln die oberste und unterste Masse untereinander gleich $(= m)$, die mittlere aber vier Mal so gross annimmt:

$$A = m(r_1^2 + r_3^2),\ B = m(r_3^2 + r_2^2),\ C = m r_3^2.$$

Denken wir uns diese Werthe in die Formeln 12 eingesetzt, so erhalten wir also die Bewegungsgleichungen unseres Systems. W_1, W_2 sind die Kräfte, welche die Bewegungshindernisse der Drehung der obersten und untersten Röhre entgegensetzen (z. B. Reibung in den Lagern), während alle anderen Bewegungen als frei von Bewegungshindernissen vorausgesetzt werden.

Discussion. 40. Wir wollen zunächst der oberen Röhre mittelst der oberen Kurbel eine beliebige vorgeschriebene Bewegung ertheilt denken und uns fragen, welche Kraft L_2 dabei auf die untere Kurbel wirken muss, damit die untere Röhre stets in Ruhe bleibt. Da die untere Röhre sich nicht bewegt, so ist $l'_2 = o$; aber dieselbe kann offenbar, wenn sie ruht, auch keinen Widerstand erfahren, weshalb auch $W_2 = o$ und

$$L_2 = \frac{d}{dt}\left(Cl'_1\right)$$

ist. So lange daher die r unverändert bleiben und auch die Geschwindigkeit des ersten Rohres sich nicht ändert, wirkt auf die zweite Kurbel keine Kraft, wächst dagegen die Geschwindigkeit der ersten Röhre, so muss auf die zweite Kurbel, um sie ruhig zu erhalten, eine Kraft im gleichen Sinne wirken, deren Intensität proportional $dl'_1 : dt$ und proportional dem Coëfficienten C ist (inducirte elektromotorische Kraft). Fehlte jene Kraft, so würde sich die zweite Röhre, während des Wachsthums der Geschwindigkeit der ersten, im entgegengesetzten Sinne drehen (inducirte Drehung). Das Entgegengesetzte gilt, wenn die Geschwindigkeit der ersten Röhre abnimmt.

Einen gleichen Effekt hat aber bei constanter Drehungsgeschwindigkeit der ersten Röhre ein Anwachsen oder Abnehmen von C durch langsame Handhabung des r_3 regulirenden Fadens. Im ersten Fall tritt eine entgegengesetzte, im letzten eine gleichsinnige Drehung der unteren Röhre auf, beide sind proportional l'_1 und $dC : dt$.

Die Analogie mit zwei elektrischen Strömen ist eine vollständige. A ist der Selbstinductionscoëfficient der ersten, B der der zweiten, C der wechselseitige Inductionscoëfficient beider Strombahnen.

Die Analogie geht noch weiter. Gemäss der letzten der Gleichungen 12 wirken auch Kräfte auf die Parameter, von denen die Werthe von A, B, C abhängig sind (auf die Fäden). Die Intensität derselben ist für in A enthaltene Parameter l'^2_1, für in B enthaltene Parameter l'^2_2, für in C enthaltene aber dem Produkte $l'_1 l'_2$ proportional und

superponirt sich für solche Parameter, die in mehreren der Grössen A, B, C vorkommen. Wenn l'_1 und l'_2 gleichbezeichnet sind und C beim Wachsthum des Parameters wächst, so ist, um ihn constant zu erhalten, eine Aussenkraft nothwendig, die ihn zu verkleinern sucht.

3. Erfahrungssatz (besser Definition der Stromintensität).

41. Dasselbe gilt auch von zwei elektrischen Strömen. Wenn bei Aenderung irgend einer Coordinate sich der Selbstinductionscoëfficient des ersten resp. zweiten Stromkreises ändert, wirkt darauf eine dem Quadrate der Intensität des ersten, resp. des zweiten Stromes proportionale ponderomotorische Kraft; wenn aber der wechselseitige Inductionscoëfficient Funktion dieser Coordinate ist, so wirkt darauf eine dem Produkte beider Stromintensitäten proportionale Kraft; ändern sich endlich bei Veränderung der Coordinate mehrere dieser Coëfficienten gleichzeitig, so addiren sich auch die betreffenden Kräfte.

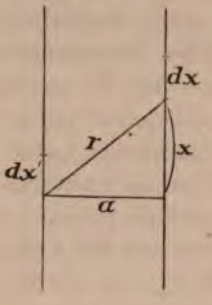
Wir genügen also nur dann der Erfahrung, wenn wir annehmen, dass die Stromintensitäten in der That den Geschwindigkeiten l' der Antriebspunkte proportional sind. Oder besser gesagt, wir definiren die Stromintensität so, dass die erstgenannten Kräfte ihren Quadraten, die letztgenannte aber ihrem Produkte proportional werden. Wir denken uns einen ein für alle Mal unveränderlichen Strom gegeben und in die Nähe einen beweglichen Stromleiter gebracht. Wollen wir die Intensität zweier anderer elektrischer Ströme mit einander vergleichen, so schicken wir durch jenen Stromleiter zuerst einen Strom von gleicher Intensität, wie der erste; dann einen Srom von gleicher Intensität wie der zweite. Das Verhältniss der ponderomotorischen Kräfte, die derselbe (natürlich immer die gleiche Gestalt und relative Lage zum ersten Strom vorausgesetzt) in dem einen und anderen Falle erfährt, giebt das gewünschte Verhältniss der Stromintensitäten. Dieses Verfahren fällt übrigens, wenn man permanente Magnete als Aggregate unveränderlicher Molekularströme auffasst, mit der Strommessung durch die Tangentenbussole zusammen. Vorausgesetzt ist dabei natürlich noch, dass man durch Elektrolyse oder eine andere Wirkung die Gleichheit des

Stromes im beweglichen Stromleiter mit je einem der zu messenden constatiren kann.

Absolute Messung der Strominten-sität i'.

42. Wollen wir eine Einheit der Stromintensität definiren, so ist es bei unserem augenblicklichen Standpunkte nicht gut, von dem Begriffe eines permanenten Magnets auszugehen. Wir denken uns vielmehr zwei sehr lange parallele Ströme in der Entfernung a Fig. 5. Sei dx ein Element des einen, dx' eines des anderen Stromes, r deren Entfernung, i, i' die im magnetischen Maasse gemessenen Stromintensitäten, so ist die Anziehung der beiden Elemente nach dem Ampère'schen Gesetze, wenn beide sich in atmosphärischer Luft befinden:

Fig. 5.



$$14)\quad p = \frac{ii'\,dx\,dx'}{r^2}\,[2\cos(dx,\,dx') - 3\cos(r,\,dx)\cos(r,\,dx')].$$

Sucht man die Componente q dieser Kraft senkrecht zu den beiden Strömen und substituirt für die Cosinus ihre Werthe, so findet man, wenn x die Entfernung des Elementes dx von der Projektion des Elementes dx' auf den Stromleiter, dem dx angehört, bedeutet:

$$q = ii'\,a\,dx\,dx'\left(\frac{2}{r^3} - \frac{3\,x^2}{r^5}\right) = ii'\,a\,dx\,dx'\left(\frac{1}{r^3} + \frac{a^2 - 2\,x^2}{r^5}\right).$$

Die gesammte Kraft Q, welche der eine Draht auf die Längeneinheit des zweiten ausübt, findet man, wenn man bezüglich dx von $-\infty$ bis $+\infty$ integrirt und $dx' = 1$ setzt. Wegen

$$\frac{1}{a^2}\,d\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r^3},\quad d\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{a^2 - 2x^2}{r^5}$$

ergiebt sich

$$Q = \frac{2ii'}{a}.$$

Wir wollen uns also die beiden sehr langen Drähte, in dem Normalmedium (atmosphärischer Luft) befindlich, von zwei Strömen von der gleichen Intensität durchflossen und letztere so gewählt denken, dass, wenn sich die Drähte in

der Entfernung eines Centimeters befinden, jeder auf die Längeneinheit des anderen gerade die Anziehungskraft zweier Dyne ausübt. Für einen Strom von solcher Intensität setzen wir $i' = 1$, dann können wir für beliebige Ströme i' durch eine Zahl ausdrücken und wissen, dass wir uns mit dem sonst als magnetischen Strommaasse bekannten Maasse im vollem Einklange befinden.

1. Erfahrungssatz. Joule's Gesetz. Messung von ω.

43. Wir betrachten nun einen einzigen unveränderlichen Strom von der Intensität i' (wie wir bereits sagen dürfen).

Für diesen ist nach Gleichung 8: $L = W$. Die während der Zeit δt geleistete Arbeit ist: $L\delta l = Wi'\delta t$; die in der Zeiteinheit geleistete Arbeit ist also Wi'.

Wenn dieser Strom sonst keinerlei Arbeit leistet, muss dieselbe als Wärme auftreten. Wir nehmen nun als aus der Erfahrung gegeben an, dass unter diesen Umständen die erzeugte Wärme in Arbeitsmaass gemessen gleich $\omega i'^2$ ist, wobei ω eine Constante der Leitungsbahn ist, welche wir den im magnetischen Maass gemessenen Widerstand nennen. Durch Messung der bei gemessener Stromintensität in einem Leiter auftretenden Wärme kann derselbe immer experimentell bestimmt werden. Damit der obige Ausdruck hiermit im Einklange sei, muss

$$W = \omega i', \tag{15}$$

also die Gegenkraft der Bewegungshindernisse proportional der Stromintensität oder der Geschwindigkeit i' des Antriebspunktes sein. Es wäre passender, die Constante ω als den Widerstandscoëfficienten oder den Widerstand bezogen auf die Stromeinheit zu bezeichnen, da er ja mit i' multiplicirt werden muss, um den thatsächlichen, von den Bewegungshindernissen herstammenden Widerstand W zu liefern.[1]) Es ist aber üblich, ω kurz als den galvanischen Leitungswiderstand zu bezeichnen.

Ohm's Gesetz ist Consequenz unserer Annahmen. Messung von L.

44. Mit Rücksicht auf 15 liefert die erste Gleichung des vorigen Artikels

$$L = \omega i',$$

[1]) Eine ähnliche Bemerkung hat schon Hankel gemacht, sächs. Ges. v. 14. Nov. 1889, S. 382; Wied. Ann. 1890, Bd. 39, S. 369.

woraus in bekannter Weise L jedesmal experimentell bestimmt werden kann. Wir sind also in vollster Uebereinstimmung mit der Erfahrung, wenn wir L als die elektromotorische Kraft, in magnetischem Maasse gemessen, definiren, und zwar ist L die äussere, durch galvanische Elemente, Thermoelektricität etc. gelieferte elektromotorische Kraft, während die elektromotorische Kraft der Induction durch das erste Glied der rechten Seite der beiden ersten Gleichungen 12 dargestellt wird.

Fünfte Vorlesung.

Bewegungshindernisse im Dielektricum. Zwei Stromkreise mit Condensatoren. Messung der übrigen Grössen.

Widerstand am Modell.

45. Wir kehren nun zu unserem Modelle zurück. Damit für dasselbe die Gleichung 15 gelte, müssen wir annehmen, dass der Widerstand W nicht von einer Reibung der obersten und untersten Röhre in ihren Lagern herrührt, sondern etwa von Windflügeln, die sich so in einem widerstehenden Mittel bewegen, dass sie einen ihrer Geschwindigkeit proportionalen Widerstand finden. Um aber vollkommene Allgemeinheit zu erzielen, muss hierzu noch ein anderer Widerstand kommen.

5. Erfahrungssatz. Widerstand im Dielektricum.

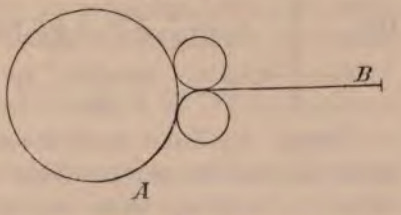
46. Wenn nämlich die Stromleitung irgendwo aufgeschnitten ist, und die beiden Enden mit den beiden Belegungen eines Condensators verbunden sind, so lehrt die Erfahrung, dass dem Strome ein Widerstand entgegenwirkt, welcher der Ladung des Condensators proportional ist; diese ist wieder dem Integralstrome

$$\int l' \, dt = l$$

proportional. Es muss also dann W noch ein zweites Glied ϑl enthalten, wobei ϑ eine neue Constante ist, deren reciproken Werth wir als die im magnetischen Maasse gemessene Capacität des Condensators bezeichnen.

Am Modelle könnte dieser Widerstand in folgender Weise dargestellt werden. Wir denken uns das eine Ende A einer elastischen Schnur an dem obersten resp. untersten Rohre, dessen Querschnitt in Fig. 6 durch den grossen Kreis dargestellt ist, das andere Ende (im unaufgewickelten Zustande ohne Spannung) an einem in gewisser Entfernung befindlichen Fixpunkte B fest gemacht. Die elastische Schnur läuft unmittelbar am Rohre reibungslos zwischen zwei sehr kleinen Rollen hindurch. Bei Drehung des Rohres wickelt sie sich auf dasselbe auf und übt vermöge ihrer Spannung auf das Rohr eine der Drehung entgegen wirkende Kraft aus, welche dem Drehungswinkel proportional ist.

Fig. 6.



3. Hypothese. Ergänzung zum 2. Erfahrungssatze.

47. Es muss hier bemerkt werden, dass durch Einführung des Widerstandes ϑl die Bewegung aufhört im strengen Sinne cyklisch zu sein, da ja die Aufwindung der elastischen Schnur auf die Axe kein cyklischer Vorgang ist; allein da ausser diesem Vorgang alle übrigen Bewegungen cyklisch sind und genau so verlaufen, wie sie bei blossem Vorhandensein des Widerstandes $\omega l'$ sich abspielen, so kann wohl kein Zweifel bestehen, dass unsere Gleichungen anwendbar bleiben.

Dieselbe Annahme muss natürlich auch für die Elektricitätsbewegung in Dielektricis gemacht werden. Diese ist selbsverständlich wieder eigentlich nicht cyklisch, da sie nur kurze Zeit in gleich gerichtetem Sinne bestehen kann, wenn nicht das Dielektricum unendlich stark polarisirt werden soll. Allein wir nehmen an, dass sowohl die Bewegung im Innern des Dielektricums als auch die dadurch erzeugte Bewegung im umgebenden Aether (nur während kürzerer Zeit) genau so geschieht, wie sie in einem Leiter dauernd in vollkommen cyklischer Weise vor sich geht. Es wird dies zur Folge haben, dass mit Ausnahme des veränderten Ausdrucks für W auf beide Fälle dieselben Gleichungen anwendbar sind.

Gleichungen für die elektrischen Oscillationen.

48. Nehmen wir an, es seien sowohl an der oberen als auch an der unteren Röhre sowohl Windflügel als auch eine elastische Schnur befestigt, so lauten die Bewegungsgleichungen unseres Systems:

$$16) \quad \begin{cases} L_1 = \frac{d}{dt}(Al'_1 + Cl'_2) + \omega_1 l'_1 + \vartheta_1 l_1, \\ L_2 = \frac{d}{dt}(Cl'_1 + Bl'_2) + \omega_2 l'_2 + \vartheta_2 l_2, \\ K = -\frac{l'^2_1}{2}\frac{\partial A}{\partial k} - \frac{l'^2_2}{2}\frac{\partial B}{\partial k} - l'_1 l'_2 \frac{\partial C}{\partial k}. \end{cases}$$

Genau dies sind auch die Gleichungen für 2 Stromkreise mit den Stromintensitäten l'_1 und l'_2 und den Widerständen ω_1 und ω_2, wenn in jedem derselben ein galvanisches Element von der elektromotorischen Kraft L_1 resp. L_2 und ein Condensator von der Capacität $1 : \vartheta_1$ resp. $1 : \vartheta_2$ eingeschaltet ist.[1]) A, B sind die Selbst-, C der wechselseitige Induktionscoëfficient der Stromkreise. Es muss als ein Vorzug der Maxwell'schen Theorie bezeichnet werden, dass wir diese für die Praxis so wichtigen Gleichungen, welche sonst erst als Consequenz der gesammten Theorie der Elektrodynamik und Induktion auftreten, gleich zu Anfang aus den wenigen beigezogenen Erfahrungsthatsachen und Hypothesen erhalten. Die grosse logische Schärfe der Maxwell'schen Theorie äussert sich eben darin, dass wir nicht alle Erfahrungsthatsachen auf einmal voranzustellen brauchen, sondern jedesmal bei Hinzuziehung einer neuen Thatsache sogleich alle Resultate gewinnen, welche sich aus den bisher beigezogenen Erfahrungsthatsachen überhaupt folgern lassen.

Die Gleichungen 16 könnten mit der grössten Leichtigkeit auf ein System von mehr als 2 Stromkreisen ausgedehnt werden, sie erschöpfen dann vollständig die Theorie der Selbstinduktion, wechselseitiger Induktion und elektrodynamischer Wechselwirkung, so lange die Stromschwan-

---

[1]) Thomson, phil. mag. (4), 5, S. 393; Helmholtz, Pogg. Ann. 83, S. 505, 91, S. 258, 427; Wiedemann, Lehre von der Elektr. IV. Bd. S. 166.

kungen so langsam sind, dass die Stromintensität zu einer gegebenen Zeit in allen Längen- und Querschnittelementen je eines geschlossenen Stromleiters gleich vorausgesetzt werden kann. Um sich aber von dieser Beschränkung frei zu machen, um die Abhängigkeit der Coëfficienten A, B, C von den Abmessungen der Drähte, endlich um die Elektricitätsbewegung in körperlich ausgedehnten Leitern zu finden, ist die Zuziehung weiterer Erfahrungsthatsachen erforderlich, welche wir auf eine spätere Vorlesung versparen wollen.

Bedeutung des Modells in der Theorie.

49. Die vollkommene Identität der Gleichungen für unser mechanisches System mit denen für 2 Stromkreise, ist keineswegs etwa eine bloss zufällige, sondern vielmehr eine im Wesen begründete, da ja sowohl unser mechanisches System als auch die beiden Stromkreise nach unserer Voraussetzung genau derselben Klasse von Mechanismen angehören, wenn auch Hülfsmittel und Form der Ausführung die denkbar verschiedensten sind. Aus dieser Identität des mechanischen Grundtypus ist auch die vollkommene Analogie zwischen dem Ablaufe der elektrischen Oscillationen und der Bewegung höchst einfacher Mechanismen z. B. gedämpfter Pendel erklärlich.

Natürlich ist der Mechanismus der elektrischen Ströme nicht nur vollständig von solchen einfachen Mechanismen verschieden, sondern auch uns vollkommen unbekannt; wir haben also hier eigentlich die Theorie einer Bewegung aufzustellen, deren Mechanismus uns ganz unbekannt ist, ja vielleicht in einer uns noch ganz unvorstellbaren Weise von allen Mechanismen abweicht, die wir aus festen Stangen, incompressibeln oder elastischen Flüssigkeiten, fernwirkenden Anziehungscentren u. s. w. construiren können.

Theorie einer unbekannten Bewegung.

Deshalb sind wir gezwungen, andere uns bekannte Mechanismen zur „dynamischen Illustration“ nebenher zu betrachten, und wir sind überzeugt, dass alles, was nothwendige Consequenz der Grundgleichungen der Mechanik ist, nicht bloss von unseren Modellen, sondern ebenso auch von dem elektrischen Mechanismus gelten wird.

So fremdartig daher auch die Theorie einer Bewegung erscheint, von der wir keine Vorstellung haben, so habe ich

doch schon am Ende der zweiten Vorlesung erörtert, dass der Unterschied zwischen der Methode unserer Theorie und der vieler älteren Theorien vielleicht bei weitem nicht so gross ist, als es auf den ersten Anblick scheinen mag.

Discussion der Gleichungen 16.

Es wäre einladend, sofort die praktische Anwendung der Gleichungen 16 in allen Details zu diskutiren und so auch die speciellen Anwendungen in unsere Vorlesungen aufzunehmen, damit gerade dem Praktiker das Studium der alten Theorien, welche für den Theoretiker immer von grossem Interesse bleiben werden, ganz erspart bleibe. Allein dies ist hier nicht meine Absicht, ich muss also bezüglich der praktischen Anwendung auf die alten Lehrbücher verweisen; nur wenige für unsere Theorie unentbehrliche Anwendungen dieser Gleichungen sollen hier gemacht werden. Zuvörderst soll die Gleichung, welche das Princip der Erhaltung der Arbeit ausdrückt, aus den Gleichungen 16 abgeleitet werden.

Erhaltung der Arbeit.

50. Die Arbeit, welche durch die äusseren elektromotorischen Kräfte, während der Zeit δt in das System hinein gesteckt wird, ist:

$$\delta Q = L_1 \delta l_1 + L_2 \delta l_2 = (L_1 l'_1 + L_2 l'_2)\, \delta t.$$

Am Modelle ist dies die Arbeit, welche geleistet wird, während sich die beiden Kurbeln in der Zeit δt um die Winkel δl_1 und δl_2 mit den Winkelgeschwindigkeiten l'_1 und l'_2 drehen und darauf die Kräfte L_1 und L_2 in der Bewegungsrichtung derselben wirken.

Substituirt man hier für L_1 und L_2 deren Werthe aus den Gleichungen 16, so erhält man eine Anzahl von Gliedern, welche wir jetzt der Reihe nach aufzählen und durch dem δQ beigefügte Indices unterscheiden wollen. Die mit den Faktoren ω behafteten Glieder liefern:

Joule'sche Wärme.

17) $$\delta Q_1 = (\omega_1 l'^2_1 + \omega_2 l'^2_2)\, \delta t.$$

Diese Arbeit wird beim Modelle an den Windflügel in Wärme umgesetzt und ist beim elektrischen Strome die

Joule'sche Wärme. Die mit den Faktoren ϑ behafteten Glieder liefern: *Auf Dielektrisirung verbrauchte Arbeit.*

$$18) \quad \begin{cases} \delta Q_2 = \vartheta_1 l_1 \delta l_1 + \vartheta_2 l_2 \delta l_2 = \delta\left(\frac{\vartheta_1 l_1^2}{2} + \frac{\vartheta_2 l_2^2}{2}\right) \\ \quad = \delta\left(\frac{\Theta_1 l_1}{2} + \frac{\Theta_2 l_2}{2}\right) = \delta\left(\frac{\Theta_1^2}{2\vartheta_1} + \frac{\Theta_2^2}{2\vartheta_2}\right). \end{cases}$$

$\Theta_1 = \vartheta_1 l_1$ und $\Theta_2 = \vartheta_2 l_2$ sind die Gegenkräfte der dielektrischen Polarisation. Diese Arbeit wird im Modelle auf Spannung der elastischen Schnüre, bei den elektrischen Phänomenen auf Erzeugung dielektrischer Polarisation verwendet.

Die Gesammtsumme, welche alle übrigen Glieder liefern, kann als die Summe zweier Ausdrücke δQ_3 und δQ_4 dargestellt werden, indem man setzt: *Aeussere Arbeit.*

$$19) \quad \begin{cases} \delta Q_3 = \frac{l'_1{}^2}{2}\delta A + \frac{l'_2{}^2}{2}\delta B + l'_1 l'_2 \delta C \\ \quad = \sum\left(\frac{l'_1{}^2}{2}\frac{\partial A}{\partial k} + \frac{l'_2{}^2}{2}\frac{\partial B}{\partial k} + l'_1 l'_2 \frac{\partial C}{\partial k}\right)\delta k. \end{cases}$$

Dies ist am Modell derjenige Betrag der durch die Kurbeln in das System hineingesteckten Arbeit, welcher auf Hebung der an den drei Fäden angehängten Lasten bei Verschiebung der drei Massen m_1, m_2, m_3 verwendet wird; bei elektrischen Strömen derjenige Theil der von der Batterie gelieferten Energie, welcher bei sichtbarer Massenbewegung die zur Ueberwindung der ponderomotorischen Kräfte erforderliche Arbeit leistet. Endlich setze man: *Elektrokinetische Energie.*

$$20) \quad \delta Q_4 = \delta T,$$

wobei:

$$21) \quad \begin{cases} T = \frac{l'_1{}^2}{2}A + \frac{l'_2{}^2}{2}B + l'_1 l'_2 C \\ \quad = \frac{1}{2}\left(l'_1 \frac{\partial T}{\partial l'_1} + l'_2 \frac{\partial T}{\partial l'_2}\right) = \frac{1}{2}(l'_1 \lambda_1 + l'_2 \lambda_2) \end{cases}$$

am Modelle die lebendige Kraft der drei Massen m_1, m_2, m_3, bei den elektrischen Phänomenen aber die lebendige Kraft derjenigen Bewegung ist, welche in ihrer Gesammtheit den elektrischen Strom ausmacht und theils im durchströmten Drahte, theils im umgebenden Medium ihren Sitz hat. Wir wollen sie als die elektrokinetische Energie bezeichnen.

Wissen wir auch weder über das Bewegte noch über die Art der Bewegung irgend etwas, so wissen wir doch, dass die lebendige Kraft dieser Bewegung einen bestimmten endlichen Werth hat, den wir in einem vorliegenden Falle berechnen können, der bei Entstehung des Stromes aus der chemischen Energie des galvanischen Elementes oder aus anderen uns bekannten Arbeitsquellen entnommen und beim Verschwinden des Stromes wieder in Wärme oder andere uns bekannte Energieformen zurückverwandelt wird. Dies wird noch klarer an den speciellen Fällen, zu denen wir jetzt übergehen wollen.

Messung von A.

51. Sei nur ein Stromkreis ohne Condensator vorhanden, seine Gestalt und die Lage etwa in der Nähe befindlicher Eisenmassen sei unveränderlich; dann liefern die Gleichungen 16 für denselben:

$$L = A\frac{dl'}{dt} + \omega l'.$$

Haben wir zu Anfang einen gegebenen constanten Strom l'^a und lassen zur Zeit Null plötzlich die elektromotorische Kraft aufhören, so dass dann $L = 0$ wird, so folgt:

$$l' = l'^a e^{-\frac{\omega}{A}t}.$$

Die Elektricität bewegt sich also wie eine träge Masse bei einem der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand z. B. eine in einer Röhre strömende Flüssigkeit, nur dass ihre gesammte Trägheit auch von der Gestalt des Stromleiters abhängt, namentlich durch spiralige Aufwicklung desselben bedeutend vermehrt wird, was in dem Umstande begründet ist, dass das umgebende Medium an der Bewegung participirt. Natürlich muss sich, wenn die Bewegung der Elektricität aufgehört hat, deren anfängliche elektrokinetische Energie $A.(l'^a)^2 : 2$ (nach Gleichung 21) in Wärme verwandelt haben. In der That hat die erzeugte Wärme:

$$\int_0^\infty \omega \frac{l'^2}{2} dt$$

(vergl. Gleichung 17) diesen Werth.

Experimentell kann am leichtesten durch den Impuls auf einen anderen bekannten Strom oder einen permanenten Magnet das Integral:

$$\int_0^\infty l' \, dt = \frac{A l'^a}{\omega}$$

bestimmt werden und hieraus kann, da l'^a und ω ebenfalls experimentell bestimmbar sind, A gemessen werden.

Messung von ϑ.

Wäre auch ein Condensator in der Strombahn, so bekäme man nach Aufhören der elektromotorischen Kraft die Gleichung:

$$Al'' + \omega l' + \vartheta l = 0,$$

welche auch für die Schwingungen einer gedämpften Magnetnadel gilt. Nach dieser Gleichung wurden alle bisher beobachteten elektrischen Oscillationen von Feddersen bis Hertz[1]) berechnet. Dieselbe kann zur experimentellen Bestimmung von ϑ dienen, wobei wir noch das Produkt $l't$, wenn darin $l' = 1$ und $t = 1$ ist, vorläufig die magnetisch gemessene Elektricitätsmenge 1 nennen, natürlich ohne uns dabei weiter etwas zu denken.

Messung von C.

52. Es seien nun wieder zwei Strombahnen von unveränderlicher Gestalt gegeben; zu Anfang der Zeit sollen darin die Stromintensitäten $l'_1{}^a$ und $l'_2{}^a$ bestanden haben. Da hören plötzlich die äusseren elektromotorischen Kräfte auf und es wird daher:

$$22) \quad \begin{cases} A\frac{dl'_1}{dt} + C\frac{dl'_2}{dt} + \omega_1 l'_1 = 0, \\ C\frac{dl'_1}{dt} + B\frac{dl'_2}{dt} + \omega_2 l'_2 = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort:

---

[1]) Kirchhoff, Ueber die Beweg. d. El. in Drähten. Pogg. Ann. Bd. 100, S. 193, 351, 1857. Schiller, Pogg. Ann. 152, S. 535, 1874. L. Lorenz, Wied. Ann. 7, S. 161, 1879. Colley, Wied. Ann. 26, S. 432, 1885, 28. S. 1, 1886. Hieke, Wien. Ac. 96, S. 134, 1887. Oberbeck, Wied. Ann. a. a. Bd. 21, S. 139, 1884. Lodge, Ueber Inductionswaage, phil. mag. Febr. 1880. Lodge, Hertzsche Schwingungen. Lond. phys. soc. Bd. 10, S. 150, 1889. Lecher, Wien. Ac. Bd. 99, S. 357, 1890.

$$(\omega_1 l'_1{}^2 + \omega_2 l'_2{}^2)\,dt = d\left(\frac{A}{2} l'_1{}^2 + \frac{B}{2} l'_2{}^2 + C l'_1 l'_2\right).$$

Die linke Seite ist die während dt entwickelte Wärme; dieselbe wird also bloss auf Kosten der gesammten elektrokinetischen Energie erzeugt und ist gleich der Abnahme der letzteren während derselben Zeit.

Integriren wir die letzte der Gleichungen 22 bis zu einer sehr späten Zeit, zu welcher l'_1, l'_2 die Werthe $l'_1{}^e$, $l'_2{}^e$ haben sollen, so erhalten wir:

$$B(l'_2{}^a - l'_2{}^e) + C(l'_1{}^a - l'_1{}^e) = \omega_2 \int l'_2\, dt.$$

Um C zu bestimmen erhalten wir anfangs durch längere Zeit l'_1 constant gleich $l'_1{}^a$, während im zweiten Stromkreise keine elektromotorische Kraft wirkt, so dass $l'_2{}^a = 0$ ist. Dann entfernen wir plötzlich auch aus dem ersten Stromkreise die elektromotorische Kraft und bestimmen experimentell den Integralstrom im zweiten Stromkreise $\int l'_2\, dt$ über eine genügend lange Zeit erstreckt. Da nach einer solchen jedenfalls beide Ströme aufhören, so ist $l'_1{}^e = l'_2{}^e = 0$ also:

$$C l'_1{}^a = \omega_2 \int l'_2\, dt,$$

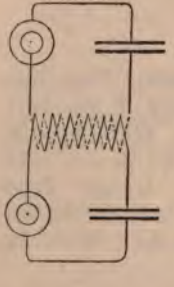
woraus C experimentell bestimmt werden kann.

Da wir nun auch alle Constanten experimentell bestimmt haben, so herrscht über die Gleichungen volle Klarheit. Alle diese Consequenzen können daher schon aus den wenigen bis jetzt zugezogenen Thatsachen und Hypothesen abgeleitet werden.

Andere Schaltungen von Cond. und Widerstand.

53. Die Gleichungen 16 gelten, falls Condensator und Widerstand hintereinander in die Stromleitung eingeschaltet sind, wie Fig. 7 zeigt. Es ist dies die praktisch weitaus am häufigsten angewendete Schaltung; doch sind andere Schaltungen offenbar nicht ausgeschlossen. Es könnten z. B. in jedem Zweige Condensator und Widerstand nebeneinander geschaltet sein (Fig. 8). Dann hätte man eigentlich vier separate Zweige und es könnte die Strom-

Fig. 7.



stärke, wenn die Capacität des Condensators eine sehr grosse ist, in allen vier Zweigen verschieden sein. Doch erhält man in verschiedenen speciellen Fällen Gleichungen von derselben Einfachheit, z. B. wenn in der Leitung von der Batterie zum CondensatorInduktionscoëfficient, Widerstand und Capacität verschwinden. Bezeichnet man dann mit l'_1 und l'_2 die Stromstärken in den Zweigen, welche die Widerstände enthalten und wo die elektromotorischen Kräfte der Induktion wie zahlreiche, in je eine Windung eingeschaltete galvanische Elemente von kleiner elektromotorischer Kraft wirken, mit n_1 und n_2 die Condensatorladungen, und mit L_1, L_2 die elektromotorischen Kräfte der Ketten, so wird:

Fig. 8.

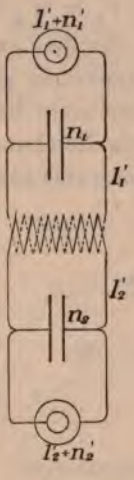
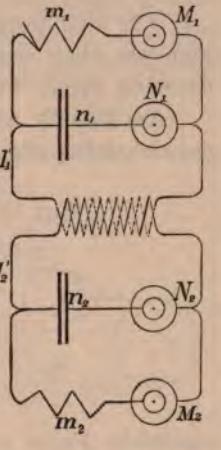


Fig. 9.



$$L_1 = \frac{d}{dt}(Al'_1 + Cl'_2) + \omega_1 l'_1 = \vartheta_1 n_1.$$

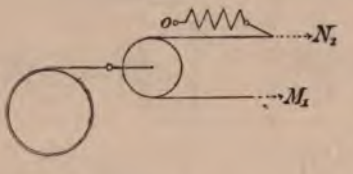
Eine noch complicirtere Schaltung stellt Fig. 9 dar, in welcher bloss die gerad gebrochen gezeichneten Leitungen mit den Stromstärken m'_1 und m'_2 erheblichen Widerstand ω_1, ω_2; bloss die spiralig gezeichneten, mit den Stromstärken l'_1 und l'_2 erhebliche Selbst- und Wechselinduktionscoëfficienten A, B, C haben sollen. n_1, n_2 sollen wieder die Ladungen der Condensatoren sein, und es kann ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit angenommen werden, dass bloss in den geradgebrochenen Leitungen und in den Leitungen zum Condensator galvanische Elemente, in ersterer von den elektromotorischen Kräften M_1, M_2, in letzterer von N_1, N_2 eingeschaltet sind. Dann gelten die Gleichungen:

$$23) \quad \begin{cases} M_1 - \frac{d}{dt}(Al'_1 + Cl'_2) = \omega_1 m'_1 \\ N_1 - \frac{d}{dt}(Al'_1 + Cl'_2) = \vartheta_1 n_1 \end{cases}$$
$$l'_1 = m'_1 + n'_1.$$

Die Gleichungen für den zweiten Stromcomplex können hier wie oben der Symmetrie gemäss gebildet werden, da derselbe genau wie der erste beschaffen ist.

Am Modelle würden Gleichungen von der Form der zuletzt entwickelten gelten, wenn sich sowohl um die oberste als auch unterste Röhre eine Schnur aufwickeln würde, welche die Axe je einer beweglichen Rolle trügen. Um diese liefe eine zweite Schnur (Fig. 10). Auf das eine Ende derselben wirkte die äussere Kraft N_1, deren Zug sich eine elastische Feder entgegensetzte; auf das andere die äussere Kraft M_1 und ein der Geschwindigkeit des Schnurendpunkts proportionaler Widerstand. Um die Bedingungen auch für negative m' und n zu erfüllen, müssten die Schnüre auch unzusammenschiebbar sein.

Fig. 10.



Sechste Vorlesung.

Praktische Ausführung der Modelle.

Mechanismus, um A, B, C unabhängig veränderlich zu machen.

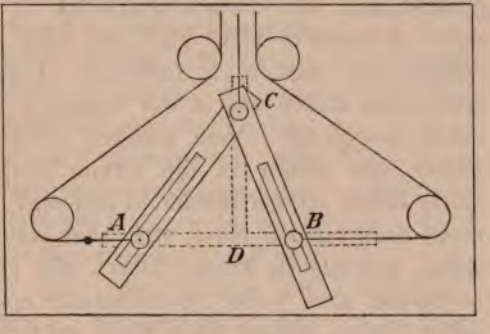
54. Durch Aenderung von r_1 oder r_2 am Modell werden nur die Selbstinduktionscoëfficienten A und B verändert. Bei Veränderung von r_3 aber verändert sich nicht bloss der wechselseitige Induktionscoëfficient C, sondern auch gleichzeitig A und B, da ja das mittlere Rohr von jedem der anderen mitbewegt wird. Es ist wünschenswerth, drei Antriebspunkte so herzustellen, dass bei alleiniger Bewegung des ersten nur A, daher nur r_1, bei alleiniger Bewegung

des zweiten nur B, daher nur r_2, bei alleiniger Bewegung des dritten nur C wächst; bei alleiniger Bewegung des dritten muss daher r_3 wachsen, dagegen r_1 und r_2 so abnehmen, dass $r_1^2 + r_3^2$ und $r_2^2 + r_3^2$ constant bleibt.

1. Theil-mechanismus.

Es kann dies durch folgenden Mechanismus erreicht werden. In einem ebenen Messingbleche seien zwei aufeinander senkrechte in Figur 11 punktirte gerade Schlitze, die sich im Punkte D schneiden; darauf liegen zwei der Länge nach aufgeschlitzte Lineale. Das Scheibchen C ist an einem kurzen Stifte befestigt, der durch kleine Löcher beider Lineale hindurchgeht, und im vertikalen Schlitze des Bleches beliebig gleiten kann. An diesem Scheibchen ist der mit m_3 verbundene Faden befestigt; es dient als dritter Angriffspunkt und seine Distanz vom Punkte D heisse x.

Fig. 11.



Die beiden Scheibchen A und B gleiten sowohl im horizontalen Schlitze des Bleches als auch in je einem Schlitze eines Lineales. Daran seien die beiden Fäden, welche zu den Massen m_1 und m_2 führen, in der aus der Figur ersichtlichen Weise befestigt; sie gehen zuerst vom Scheibchen in der Richtung des horizontalen Schlitzes des Blechs fort, dann über eine am fixen Bleche befestigte Rolle, dann über je eine zweite ganz nahe am zuerst besprochenen Faden befindliche Rolle und endlich parallel diesem vertikal aufwärts.

Sind die Längen der Fäden so regulirt, dass jede Masse m gerade in die Axe der drei Röhren zu liegen kommt, wenn das betreffende Scheibchen nach D gelangt, so sind die Bedingungen erfüllt: $r_1^2 + r_3^2 = AC^2$ und

$r_2^2+r_3^2=BC^2$. Es ist also nur noch ein Mechanismus nothwendig, welcher gestattet, bei unveränderter Lage des Punktes C die Längen AC und BC zu ändern und umgekehrt bei Constanz dieser Längen den Punkt C zu verschieben.

2. Theilmechanismus.

Dies kann so realisirt werden: Vor dem beschriebenen Bleche befindet sich ein zweites paralleles und parallel zu sich selbst verschiebbares in der Distanz x vom ersten Bleche. Am Scheibchen C ist eine in die Richtung des Schlitzes des Lineales AC fallende nicht ganz bis A reichende und eine zweite senkrecht zu den Blechen nach vorn zu liegende nicht ganz bis zum zweiten Bleche reichende sehr enge Röhre befestigt. Vom Scheibchen A geht eine dritte Röhre aus in der Richtung AC, die in die erste etwas hineinragt. Vom zweiten Bleche aber eine vierte Röhre, die wieder in die zweite etwas hineinragt. Die vierte Röhre ist am Bleche so befestigt, dass sie stets senkrecht dazu bleiben muss, sich aber beliebig parallel zu sich selbst verschieben kann. Durch alle vier Röhren geht ein biegsamer aber weder ausdehnsamer noch zusammenschiebbarer Faden, dessen eines Ende am Scheibchen A befestigt ist, dessen anderes aber gezwungen ist in der Ebene des zweiten Bleches zu liegen. Genau so ist das Scheibchen B mit einem hinter dem ersten Bleche in der Distanz y davon befindlichen dritten Bleche verbunden. x, y, z sind die Variablen, von denen jede nur einen Induktionscoëfficienten ändert; x, y je einen Selbstinduktionscoëfficienten; verändert sich dagegen bei constantem x und y nur z, so ändert sich bei constanten Selbstinduktionscoëfficienten nur der wechselseitige Induktionscoëfficient.

Sind alle drei Röhren in Drehung begriffen, so wirkt daher auch auf die Variable x nur die $l'_1{}^2$ proportionale Kraft, auf die Variable y nur die $l'_2{}^2$ proportionale, endlich auf z nur die dem Produkte $l'_1 l'_2$ proportionale Kraft. Auf z wirkt also keine Kraft, wenn sich nur das obere oder nur das untere Rohr dreht.

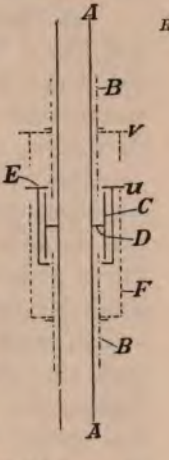
Praktische Ausführung solcher Modelle.

55. Diese idealen Modelle genügen vollständig unseren Zwecken; sie sollen ja bloss zur Veranschaulichung nicht zur experimentellen Prüfung der abgeleiteten Sätze dienen.

Trotzdem wirkt auch hier mächtig der Drang nach realer Existenz. Es beschreibt Lord Rayleigh[1]) einen zu diesem Zwecke dienenden sehr einfachen Apparat, an welchem jedoch die Parameter nicht verändert werden können, was für uns gerade sehr wesentlich ist. Derselbe erwähnt auch einen Apparat des Laboratoriums zu Cavendish, der mir leider unbekannt ist. Ich liess zu gleichem Zwecke einen Apparat construiren, der wie ich glaube allen Anforderungen genügt.

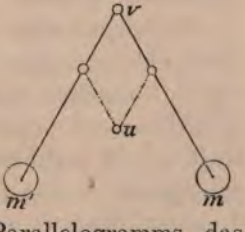
Fig. 12.

Reales Monocykel.



Ich beschreibe zunächst einen Apparat, welcher ein monocyklisches System darstellt. Eine cylindrische Röhre B, Fig. 12, in der ein cylindrischer Stab A steckt, ist von einem Ringe C umgeben, der mit zwei Schrauben D mit dem Stabe fest verbunden ist. Die Schrauben gehen durch passende Schlitze der Röhre. Die Fig. 12 ist ein Querschnitt. Der Ring ist von einem beweglichen Hohlringe E umschlossen und dieser von einer zweiten der ersten coaxialen Röhre F. Der Hohlring trägt zwei vis-à-vis liegende kleine Zapfen u, die wieder durch passende Schlitze der äusseren Röhre F hindurchgehen. Ist die innere Röhre fest und rotirt die äussere, so rotirt also der Hohlring mit, der massive, an der Stange befestigte nicht. Ohne die Rotation zu stören, können durch Aus- und Einschieben der Stange die Zapfen dabei auf- und abbewegt werden. Sie sollen deshalb die verschiebbaren Zapfen heissen.

Fig. 13.



Die äussere Röhre trägt noch zwei fixe Zapfen v. Je ein fixer und ein beweglicher Zapfen aber tragen die beiden vis-à-vis liegenden Ecken (in Fig. 13 wieder mit u und v bezeichnet) eines Parallelogramms, das ganz wie der Centrifugalregulator einer Dampfmaschine ein-

[1]) Phys. Soc. of London Volum. 10, p. 434. November 1890.

gerichtet ist. (In Fig. 13 in der Seitenansicht gezeichnet.) Die Ebenen beider Parallelogramme sind parallel der Röhrenaxe und auch zu einander und stehen um die Rohrdicke ab. Beide Parallelogramme tragen an beiden Enden je eine Masse m und m', so dass also diese Massen ohne Störung der Rotation gehoben und gesenkt werden können. Dieser Apparat wurde nur ganz roh zur Erläuterung eines Bestandtheiles des Nachfolgenden ausgeführt, da die mit ihm auszuführenden Experimente nicht von Belang sind.

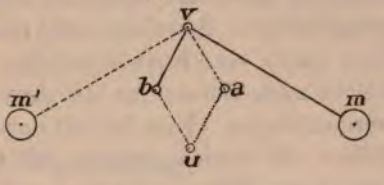
Reales Bicykel.

56. Wir brauchen nur drei derartige Apparate nach Art der Fig. 4 Art. 39 zu koppeln, so erhalten wir ein Bycikel, von dem Fig. 14 einen Durchschnitt und Fig. 15 eine perspectivische Zeichnung zeigt. In Figur 14 ist, um Platz zu sparen, nur das mittlere Drittel gezeichnet.

Das Stahlrohr B geht durch den ganzen Apparat und ist oben und unten getragen. Dasselbe wird durch zwei fixe darüber gesteckte kurze Rohrstücke G in drei gleiche Theile getheilt. Um jeden dieser Theile rotirt ein bewegliches Messingrohr F. Die Reibung des obersten und untersten stellt die Kräfte W_1 und W_2 dar, wenn sie freilich auch ein anderes Gesetz befolgt. Zwischen dem mittleren dagegen und den beiden kurzen Rohrstücken, sowie zwischen dem später zu beschreibenden fixen und rotirenden Ring im Innern dieses Rohres sind behufs möglichster Verminderung der Reibung Friktionskugeln K eingefügt, wie sie bei den Fahrrädern der Byciklisten üblich sind, um doch in einer Hinsicht der Namensvetterschaft der beiden Vorrichtungen gerecht zu werden. Durch das Stahlrohr B geht ein Stab A, welcher mit drei über das Stahlrohr gesteckten auf- und abschiebbaren, aber nicht drehbaren Ringen C (in Fig. 14 nur der mittlere sichtbar) verbunden ist. Zwischen jedem derselben und dem ebenfalls am Stabe befestigten Stift S läuft je ein drehbarer Ring E, welcher den einen Befestigungspunkt u des Centrifugalregulators trägt. Der nicht drehbare Ring C und der Stift S zusammen entsprechen dem in Figur 12 mit C bezeichneten Ringe. Sonst bezeichnen gleiche Buchstaben in Figur 12 und 14 auch entsprechende Bestandtheile. Der Stift S und die Verbindungs-

schraube zwischen A und C gehen natürlich durch einen passenden Schlitz des Rohres B. Der unterste drehbare Ring und der Zapfen v_1 (um 90 Grad verdreht v'_1) der untersten beweglichen Röhre F_1 tragen, ebenfalls genau wie in Figur 12 und 13, zwei Centrifugalregulatoren; ebenso oben. An dem Zapfen u (oder u', letzteres stellt eine um 90 Grad verdrehte Lage dar) des mittleren drehbaren Ringes E und v des mittleren beweglichen Rohres F aber ist ein anders beschaffener Centrifugalregulator befestigt. Die Centrifugalregulatoren sind in Figur 14 in zwei Lagen punktirt. Der mittlere derselben trägt viermal so grosse Massen und die Arme, welche die Massen tragen, sind senkrecht an den Armen des Parallelogramms befestigt. (Siehe Figur 16, wo immer gleich punktirte Linien ein fest verbundenes System von Stangen darstellen.) Bei Annäherung der Zapfen nähern sich daher die Massen der Axe. Zapfen u geht natürlich durch einen Schlitz des Rohres F. Man sieht leicht, dass dieser Mechanismus so beschaffen ist, dass r_3 abnimmt, wenn r_1 und r_2 wachsen, und zwar erfüllt er die Bedingung:

Fig. 16.



$$r_1^2 + r_3^2 = r_2^2 + r_3^2 = \text{const.}$$

Durch Senken der centralen Stange wird r_3, daher auch C vergrössert, ohne dass B und A sich ändern. Dies entspricht der Vermehrung des wechselseitigen Induktionscoëfficienten; also, wenn die obere und untere Röhre zwei Stromkreise darstellen, der Annäherung derselben. Auf zwei andere Antriebspunkte, durch welche die Selbstinduktionscoëfficienten geändert werden könnten, wurde verzichtet.

An der oberen und unteren Röhre ist je ein horizontales Zahnrad, an der mittleren sind mittelst der Schrauben p zwei Stangen P befestigt, welche je ein vertikales Zahnrad tragen. Die vertikalen Zahnräder greifen mit einer konischen Verzahnung in die beiden horizontalen Zahnräder ein.

Die Verzahnungsstellen sind in Fig. 14 mit Z bezeichnet. Durch diese Verzahnung wird derselbe Effekt wie in Fig. 4, Art. 39 durch Reibung der drei Scheiben erzielt. Die Zapfen w dienen bloss, um die Centrifugalregulatoren bei Versuchen, wo ihre Winkel nicht geändert werden, auch an den Röhren F direct befestigen zu können.

Die untere bewegliche Röhre F_1 trägt (in Fig. 14 nicht sichtbar) eine, die obere F_2 zwei horizontal liegende Riemenscheiben. Seitwärts steht eine zweite parallele vertikale Axe, durch eine Kurbel drehbar, mit drei Riemenscheiben, welche nach Wunsch an die Axe geklemmt und losgemacht werden können. Eine ist mit der Riemenscheibe der unteren Röhre, die beiden anderen mit den beiden Riemenscheiben der oberen Röhre, jedoch so verbunden, dass sich oben das eine Paar gleichsinnig, das andere entgegengesetzt dreht.

Experimente mit dem realen Bicykel.

57. Mit diesem Apparate können folgende Experimente ausgeführt werden:

1. Man treibt bloss das untere Rohr; so lange die Geschwindigkeit wächst, dreht sich das obere entgegengesetzt; bei constanter Drehung des unteren steht das obere still; nimmt die Geschwindigkeit ab, so dreht sich das obere gleichsinnig. Diese Wirkung ist grösser, wenn die centrale Stange ganz unten als wenn sie oben ist.

2. Das untere Rohr wird mit constanter Geschwindigkeit angetrieben, oben sind beide Riemenscheiben nicht geklemmt. Schiebt man die Stange rasch nach abwärts, vermehrt also den wechselseitigen Induktionscoëfficienten, so dreht sich das obere Rohr entgegengesetzt; schiebt man die Stange aufwärts, so dreht es sich gleichsinnig wie das untere Rohr.

3. Dreht man das obere und untere Rohr in gleichem Sinne, so wird die centrale Stange nach abwärts gezogen, was einer Vermehrung der Selbstinduktion, also einer Annäherung der beiden Stromkreise entspricht.

4. Dreht man das obere und untere Rohr entgegengesetzt, so wird die Stange hinaufgezogen.

58. Dieser Apparat wurde von dem Mechaniker Herrn v. Gasteiger in Graz in vorzüglicher Weise ausgeführt

und die Experimente an demselben gelingen vollständig; für die Werkzeichnungen und manche Hilfeleistung bei der Construktion bin ich Herrn Privatdocenten Dr. Paul Czermak in Graz, für die Beihilfe bei einigen nachträglichen Veränderungen und die Anfertigung sämmtlicher Zeichnungen und Photographien für das vorliegende Buch Herrn Dr. Fomm, Assistenten der Physik in München zu Danke verpflichtet.

Siebente Vorlesung.

Polycykel. Begriff des Momentes.

Uebergang zu neuen Phänomenen.

59. Um die Abhängigkeit des Induktionscoëfficienten von den Abmessungen der Stromkreise zu finden, müssen wir natürlich jedes Längenelement eines solchen als ein kleines Monocykel, um die Strömung der Elektricität durch räumlich ausgedehnte Körper zu finden, jedes Volumelement als ein selbständiges Individuum, in welchem eine cyklische Bewegung stattfindet, betrachten.

Könnten wir dies in mechanischen Modellen zum Ausdrucke bringen, könnten wir den ganzen Raum mit kleinen Modellen von der Natur der soeben betrachteten füllen und die Wechselwirkung aller überblicken: Wir könnten uns ein anschauliches Bild aller elektrischen und magnetischen Phänomene machen. Allein einen derartigen Mechanismus, von dem der in Maxwell's ersten Arbeiten angenommene, in sechseckige Zellen getheilte Aether eine Idee giebt, in Messing auszuführen oder sich in der Vorstellung klar zu veranschaulichen, wäre gleich unmöglich. Hier verlassen uns alle Hilfsmittel bis auf die Analysis.

Polycykeln.

60. Wir betrachten also jetzt das allgemeinste cyklische System, in welchem die Position aller Massentheilchen durch $\nu + 1$ cyklische Variablen l, l_1, $l_2 \ldots l_\nu$ und beliebige langsam veränderliche Parameter k_1, $k_2 \ldots k_n$ bestimmt ist.

Der einfachste derartige Fall ist der, dass wir uns an Stelle der früher betrachteten zwei, jetzt $\nu + 1$ Stromkreise denken und wieder annehmen, dass die Schwankungen der Stromintensität so langsam vor sich gehen, dass in jedem einzelnen derselben zu jeder beliebigen Zeit die Stromdichte für jedes Längen- und Querschnittselement gleich vorausgesetzt werden kann. Allein wir haben auch noch den allgemeineren Fall zu betrachten, dass die Stromintensität von Element zu Element wechselt. Es treten dann an Stelle der geschlossenen Stromkreise die einzelnen Stromelemente und l', l'_1, $l'_2 \ldots l'_\nu$ sind die Stromintensitäten in den verschiedenen Elementen.

4. Hypothese Cavallar zur 3., die in den Elementen thätigen Mechanismen sind, wie die der ganzen Ströme, den obigen Gleichungen unterworfen.

61. Freilich kann streng genommen wieder in einem einzigen Elemente unabhängig von allen anderen eine cyklische Bewegung dauernd nicht bestehen; nur verschwindend kurze Zeit ist die Elektricitätsbewegung in einem Stromelemente unabhängig von den umgebenden Elementen möglich. Allein gerade so, wie wir von einem Dielektricum annahmen, dass daselbst durch kurze Zeit eine wesentlich gleiche Bewegung stattfinden kann, wie sie im Leiter dauernd besteht, so wollen wir voraussetzen, dass auch bei rasch veränderlichen Strömen die Bewegung in jedem Elemente noch denselben Charakter hat, dass wir also auch auf sie die Gleichungen anwenden können, die wir für geschlossene Ströme fanden. Genau genommen geht unsere Voraussetzung nur dahin, dass auch bei ihnen, wie bei geschlossenen Strömen, in dem Ausdrucke für die lebendige Kraft das undifferenziirte l nicht eingeht. Das über die langsam veränderlichen Parameter k, welche die Positionen der ponderablen Körper bestimmen, Gesagte gilt ja selbstverständlich jetzt ebenso wie früher, und andere Specialisirungen der allgemeinen Gleichungen der Mechanik haben wir bisher nicht eingeführt. Wir nehmen daher an, dass in den Stromelementen die gleichen, denselben Gleichungen unterworfenen Mechanismen thätig sind, wie in geschlossenen Strömen, wenn wir auch für einzelne Stromelemente den experimentellen Nachweis hierfür nicht direkt liefern können, da in einem einzelnen

Elemente für sich ein andauernder Strom nicht erhalten werden kann.

62. Natürlich bleibt dabei die Frage, ob bei sehr raschen (den Hertz'schen) Schwingungen nicht möglicherweise der Einfluss solcher das undifferenziirte l enthaltender, hier nicht berücksichtigter Glieder entdeckt werden könnte, eine offene und es ist gerade ein Hauptverdienst der Maxwell'schen Theorie, dass sie zahlreiche derartige Fragen aufwirft, welche zu neuen Experimenten anregen. (Jedenfalls muss sich die Elektricitätsbewegung den hier abzuleitenden Gleichungen nähern, wenn die Schwingungen nicht allzu rasch sind).

Aufstrom.

63. Mögen nun durch die $\nu + 1$ cyklischen Variablen die Zustände ebenso vieler geschlossener Ströme oder Stromelemente definirt sein, jedenfalls werden wir nicht alle $\nu+1$ auf einmal überblicken können. Wir wollen daher von vorne herein nur eines davon ins Auge fassen und die Wirkung aufsuchen, welche gerade auf dieses Eine ausgeübt wird. Wir wollen das ins Auge gefasste kurz den Aufstrom nennen und darauf sollen sich die Buchstaben ohne Index beziehen.

Alle übrigen sollen nur da sein, um das elektrische Feld zu definiren, in welchem sich unser Aufstrom befindet und es soll gefragt werden, welche Wirkung das durch die übrigen Ströme definirte Feld gerade auf den ins Auge gefassten Aufstrom ausübt.

Leb. Kraft des Polycykels.

64. Sei m^i irgend eine Masse des Systems, welches wir jetzt als Polycykel bezeichnen, deren Geschwindigkeit wieder:

$$v^i = a^i l' + b^i_1 l'_1 + b^i_2 l'_2 \ldots + b^i_\nu l'_\nu, \ (i = 1, 2, 3 \ldots p)$$

sei. Dann ist:

$$\frac{m^i (v^i)^2}{2} = \frac{m^i (a^i)^2}{2} l'^2 + m^i a^i l' (b_1{}^i l'_1 + b_2{}^i l'_2 + \ldots b^i_\nu l_\nu) + M.$$

M und N sollen Grössen sein, welche das l' ohne Index nicht enthalten. Hiernach ist:

$$T = \sum_{i=1}^{i=p} \frac{m^i (v^i)^2}{2} = \frac{l'^2}{2} \sum_{i=1}^{i=p} m^i (a^i)^2$$

$$+ l' \sum_{i=1}^{i=p} m^i a^i (b_1{}^i l'_1 + b_2{}^i l'_2 + \ldots b_\nu{}^i l'_\nu) + N$$

$$= \frac{l'^2}{2} \sum_{i=1}^{i=p} m^i (a^i)^2 + l' \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{h=1}^{h=\nu} m^i a^i b_h{}^i l'_h + N.$$

Wir wollen nun vorläufig den Aufstrom, gleichgültig, ob wir uns darunter einen geschlossenen Strom oder ein Stromelement vorstellen, mit s, die Doppelsumme mit $J(s)$, die einfache Summe mit A bezeichnen, also setzen:

24) $$A = \sum_{i=1}^{i=p} m^i (a^i)^2, \qquad J(s) = \sum_{i=1}^{i=p} \sum_{h=1}^{h=\nu} m^i a^i b^i{}_h l'_h.$$

so dass:

25) $$T = \frac{A}{2} l'^2 + l' J(s) + N$$

wird. Für zwei Ströme ist l, l_1, $J(s)$ mit dem identisch, was dort mit l_1, l_2 und l'_2 C bezeichnet wurde.

Wovon hängt das Moment eines Stromes ab?

65. Die Grösse $J(s)$ bezeichnen wir als das Moment unseres Stromes s in dem gegebenen Felde. Diese Grösse ist offenbar abhängig: 1. Von der Natur des Feldes, also der Intensität und Lage sämmtlicher anderer Ströme. 2. Von der Gestalt und Lage des Aufstroms, aber nicht mehr von der Stromintensität in demselben, da ja l' vor das Summenzeichen herausgehoben wurde. Es ist also bei der Definition des Begriffs des Momentes von der Stromintensität im Aufstrome vollkommen abstrahirt. Der Aufstrom ist dabei nur als eine im gegebenen Felde liegende geometrische Curve aufzufassen.

Moment eines Curvenelementes und einer Curve.

Wir können in ein beliebiges Feld ein beliebiges Element einer Curve legen. Wenn dieses Element ein Stromleiter wäre, würde ihm immer im Felde ein bestimmtes Moment zukommen, welches wir einfach das Moment dieses Curvenelementes im gegebenen Felde nennen. Jedem Curvenelemente kommt in jedem Felde ein bestimmtes Moment zu und nach dem Späteren kommt daher auch jeder unge-

schlossenen oder geschlossenen Curve ein Moment zu, welches einfach die Summe der Momente ihrer Elemente ist.

6. Erfahrungssatz: der Strom hat eine Richtung.

66. Aber eins ist zu bemerken: Die Erfahrung lehrt, dass der elektrische Strom immer eine bestimmte Richtung hat. Um diese eindeutig zu definiren, müssen wir eine bestimmte Richtung im Stromleiter s als positiv annehmen. Je nachdem die Strömungsrichtung der positiven Elektricität mit derselben zusammenfällt oder ihr entgegengesetzt ist, ist dann l' mit dem positiven oder negativen Zeichen zu versehen.

Aendern wir nichts, als dass wir die entgegengesetzte Richtung von s positiv wählen, so ändert sich daher nichts als das Zeichen von l'; daher bleiben auch in unseren Formeln alle Grössen unverändert; nur die Coëfficienten a^i, welche mit der ersten Potenz von l' multiplicirt erscheinen, ändern ihr Zeichen, während alle Coëfficienten b unverändert bleiben.

Es folgt daraus, dass A und N unverändert bleiben, während $J(s)$ lediglich sein Zeichen wechselt. Wir wollen dies letztere symbolisch dadurch ausdrücken, dass wir schreiben:

$$26) \qquad J(-s) = -J(s).$$

Diese Gleichung folgt übrigens schon daraus, dass durch die blosse Uebereinkunft, die entgegengesetzte Richtung von s als positiv zu wählen, sich unmöglich der Werth der lebendigen Kraft T ändern kann. Da aber hierdurch im Ausdrucke 25) nur l' sein Zeichen ändert, so muss auch dessen Coëfficient $J(s)$ das Zeichen wechseln, während A und N ungeändert bleiben.

Elektromotorische Kraft im Aufstrom.

67. Wir finden nun für die elektromotorische Kraft, die in unserem Aufstrome wirkt, wenn noch die Bewegungshindernisse die Gegenkraft W ausüben nach Gleichung 8, Art. 36, den Werth:

$$27) \qquad L = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial l'} + W = \frac{d(Al')}{dt} + \frac{dJ(s)}{dt} + W.$$

Denken wir uns nun das Feld sammt seinen Veränderungen gegeben und betrachten bloss die elektromotorische Kraft $L(s)$, welche zur Ueberwindung des Wider-

standes und der durch die Veränderungen des Feldes in unserem Aufstrome erzeugten Induktion erforderlich ist (d. h. bloss das 2. und 3. Glied der Gleichung 27. Wir betrachten also 1. nicht die Wirkung auf die anderen Ströme des Feldes, 2. aber auch nicht die elektromotorische Kraft, welche der Aufstrom in sich selbst erzeugt und welche durch das erste Glied der Gleichung 27 ausgedrückt wird. Dann ist also:

$$28) \qquad L(s) = \frac{dJ(s)}{dt} + W.$$

Es kann übrigens das weggelassene Glied der Gleichung 27 unter verschiedenen Verhältnissen an sich schon gegen die übrigen vernachlässigt werden, so dass das mittlere Glied der Gleichung 27 überhaupt die gesammte im Aufstrome inducirte elektromotorische Kraft angiebt. Dies tritt ein: 1. wenn die Stromintensität im Aufstrome sehr klein ist. Dann ist l' sehr klein und das erste Glied verschwindet gegen das zweite. Physikalisch ausgedrückt: der Aufstrom ist so schwach, dass er selbst nur verschwindend wenig zur Charakteristik des Feldes beiträgt; diese und daher auch die im Aufstrome inducirte elektromotorische Kraft rührt fast ausschliesslich von den übrigen Strömen des Feldes her. 2. Dasselbe gilt aber auch, wenn der Aufstrom nur ein verschwindender Theil des Feldes, also nur ein Stromelement ist. Dann verschwindet, auch wenn die Stromintensität darin beliebig ist, eo ipso die von ihm erzeugte Wirkung gegenüber der durch das ganze übrige Feld hervorgerufenen und der in Gleichung 28 angegebene Werth von $L(s)$ liefert die ganze elektromotorische Kraft L in s.

Moment einer Summe (Consequenz).

68. Hat l' in mehreren sich aneinander schliessenden Theilen eines Stromleiters denselben Werth, wie dies jedenfalls in einer geringen Zahl sich unmittelbar folgender Längenelemente desselben Stromes angenommen werden kann[1]), so ist offenbar die Gesammtkraft $L(\Sigma s)$, welche durch das Feld in s inducirt wird, gleich der Summe $\Sigma L(s)$ der Kräfte $L(s)$, die in den einzelnen Stromleitern wirken. Ist

[1]) Diese Bedingung ist übrigens für die späteren Consequenzen nicht einmal nothwendig, da das Moment J gar nicht von l' abhängt.

$J(s)$ das Moment eines solchen Theiles, $J(\Sigma s)$ das Moment des Inbegriffs aller Theile, so hat man:

$$L(s) = \frac{dJ(s)}{dt}, \qquad L(\Sigma s) = \frac{dJ(\Sigma s)}{dt},$$

daher, da man jedenfalls annehmen kann, dass für $t = -\infty$, $J(s) = J(\Sigma s) = o$ ist:

29) $$J(\Sigma s) = \Sigma J(s).$$

Das Moment eines Inbegriffs mehrerer Stromtheile ist also die Summe der Momente der einzelnen Theile.

$J(ds)$ ist proportional ds.

Ist $J(ds)$ das Moment eines Elementes ds und theilt man dies noch in mehrere (n) kleinere gleich lange und gleichbeschaffene Elemente $d\sigma$, so kann das Moment jedes $d\sigma$ gleich angenommen werden. Es ist also $J(ds) = nJ(d\sigma)$, d. h. es ist $J(ds)$ proportional der Länge ds, daher:

$$J(ds) = Eds,$$

wobei E eine endliche Grösse ist. Dies folgt übrigens auch schon daraus, dass nach Gleichung 29 das Moment eines endlichen Stromes:

$J(s) = \int J\,ds$, J als Linienintegral.

30) $$J(s) = \int J(ds)$$

ist, wobei das Integral über alle Stromelemente zu erstrecken ist, was nur unter der Bedingung, dass E im Allgemeinen endlich ist, einen allzeit endlichen Werth liefert.

Ponderomotorische Kraft auf den Aufstrom.

69. Sei k irgend ein Parameter, welcher theils die Position des Aufstroms, theils aber auch die solcher Körper bestimmt, in welche die vom Aufstrome erzeugte Bewegung übergreift. Natürlich wird möglicherweise auch noch die Lage anderer Ströme des Feldes durch diesen Parameter bestimmt sein.

Die Kraft K, welche auf k von aussen wirken muss, um es constant oder in der durch die Gleichungen ausgedrückten Weise langsam veränderlich zu erhalten, ist dann nach Gleichung 6, Art. 31:

$$K = -\frac{\partial T}{\partial k} = -\frac{l'^2}{2}\frac{\partial A}{\partial k} - l'\frac{\partial J(s)}{\partial k} - \frac{\partial N}{\partial k}.$$

Hier rührt das erste Glied von der Wirkung des Aufstroms auf sich selbst, das letzte von der Wirkung her, die auf die übrigen Ströme des Feldes ausgeübt wird. Die

Wirkung des Feldes auf den Aufstrom, welche wir jetzt einzig und allein betrachten und mit $K(s)$ bezeichnen, ist daher lediglich durch das zweite Glied bestimmt.

Ist die Stromintensität l' im Aufstrome sehr klein oder der Aufstrom nur ein unendlich kleines, daher verschwindendes Element des ganzes Feldes, so verschwindet das erste Glied. Es ist also dann die gesammte ponderomotorische Kraft, welche in Folge der Wirkung auf unseren Aufstrom auf den Parameter k wirkt:

$$31) \qquad K(s) = -\, l' \frac{\partial J(s)}{\partial k}.$$

Wenn sich alle Parameter k um δk ändern, ist daher die gesammte Arbeit der ponderomotorischen Kräfte

$$32) \qquad \sum K(s)\,\delta k = -\sum l' \frac{\partial J(s)}{\partial k}\,\delta k = -\, l'\,\delta J(s).$$

Da alle Ströme in einander greifen und das Zusammenwirken aller erst den Zustand des Feldes bestimmt, so lässt sich eigentlich nicht scharf unterscheiden, welcher Theil der auf k wirkenden ponderomotorischen Kraft von dem einen, welcher von dem anderen Strome herrührt, falls durch den Parameter k die Positionen mehrerer Ströme gleichzeitig bestimmt sind, allein wir wissen, dass, wenn wir den Ausdruck 31 für jedes Stromelement des Feldes bilden (wo das früher besprochene erste Glied verschwindet) und dann alle so gewonnenen Ausdrücke $K(s)$ addiren, wir sicher die auf k wirkende Gesammtkraft richtig erhalten. In diesem Sinne eben wollen wir diesen Ausdruck als denjenigen Theil der Gesammtkraft betrachten, welcher von unserem Strome geliefert wird. Daraus folgt natürlich wieder:

$$K(\Sigma s) = \Sigma K(s) \quad \text{und} \quad J(\Sigma s) = \Sigma J(s).$$

Elektrokinetische Energie des Aufstroms.

70. Gleiches gilt von der gesammten lebendigen Kraft oder, wie wir deutlicher sagen, von der elektrokinetischen Energie des Systems; dieselbe ist:

$$T = \frac{l'}{2}\frac{\partial T}{\partial l'} + \frac{l'_1}{2}\frac{\partial T}{\partial l'_1} + \frac{l'_2}{2}\frac{\partial T}{\partial l'_2} + \cdots$$

Wir erhalten daher jedenfalls wieder die gesammte elektrokinetische Energie richtig, wenn wir den Ausdruck:

$$\frac{l'}{2}\frac{\partial T}{\partial l'} = \frac{l'\lambda}{2}.$$

für jeden der Ströme resp. jedes der Stromelemente des ganzen Feldes bilden und alle diese Ausdrücke zum Schlusse addiren. Wir können jedem der Ströme gerade diese elektrokinetische Energie $l'\lambda : 2$ zuschreiben und wollen dies den Betrag nennen, welchen gerade dieser Strom zur elektrokinetischen Energie beiträgt, und mit $T(s)$ bezeichnen.

Dies ist freilich wieder in gewisser Beziehung willkürlich, da ja die elektrokinetische Energie nur durch das Zusammenwirken aller Ströme entsteht. Es lässt sich also nicht strenge unterscheiden, welchen Beitrag jeder einzelne Strom dazu liefert. Aber soviel ist wieder sicher: wenn wir jedem Theile diese elektrokinetische Energie $T(s)$ zuschreiben und dann die allen zugeschriebene elektrokinetische Energie addiren, so liefert die Summe die richtige Gesammtenergie des Feldes. Es ist also:

$$T(s) = \frac{l'}{2}\frac{\partial T}{\partial l'} = \frac{l'}{2}[Al' + J(s)].$$

Ist wieder entweder l' sehr klein oder zählen wir die Elemente des Stromleiters einzeln auf, so dass s ein einzelnes Element bedeutet, welches für sich allein jedenfalls nur verschwindend wenig zum Gesammtcharakter des Feldes beitragen kann, so verschwindet das erste Glied und es bleibt:

33) $$T(s) = \frac{l'}{2}J(s).$$

Achte Vorlesung.

Eigenschaften des Momentes. Stokes' Satz.

71. Sei das Moment irgend einer geschlossenen Curve s zu bestimmen, wobei natürlich eine Umkreisungsrichtung derselben als die positive gegeben sein muss. Wir denken uns eine beliebige ebene oder gekrümmte Fläche Φ, deren Contur jene geschlossene Curve ist und zerlegen diese Fläche in unendlich viele unendlich kleine Flächenelemente dx.

J als Flächenintegral (Consequenz).

Da jede im Felde liegende Curve ein Moment hat, so muss auch die Contur jedes Flächenelementes $d\varkappa$ ein bestimmtes Moment haben, welches wir mit $J(d\varkappa)$ bezeichnen wollen, wobei natürlich jedes $d\varkappa$ in demselben Sinne, wie s umkreist werden muss. $J(\Phi)$ oder $\int J(d\varkappa)$ sei die Summe der Momente aller dieser in die Curve s eingezeichneten kleinen Conturen. Nach Gleichung 30 kann man aber die Contur jedes Flächenelementes $d\varkappa$ wieder in sehr viele Linienelemente zerlegen und nach Gleichung 26 heben sich in der Summe $\int J(d\varkappa)$ die Momente aller im Innern der Curve s liegenden Linienelemente auf, da jedes derselben einmal in dem einen, das andere Mal im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird; die Elemente aber, welche in der Contur der Fläche Φ liegen, liefern zusammen $J(s)$. (S. Fig. 17.)

Fig. 17.

Es lässt sich also $J(s)$, ebenso gut, wie durch das Linienintegral $\int J(ds)$, auch durch ein Flächenintegral darstellen. Es ist:

34) $$J(s) = \int J(d\varkappa),$$

woraus selbstverständlich folgt, dass $J(d\varkappa)$ unendlich klein wie $d\varkappa$, also von der Form $E' d\varkappa$ sein muss, wobei E' endlich ist, obwohl es, wenn als Linienintegral dargestellt, in der Form eines Integrals erscheint, das über eine Curve erstreckt ist, deren Länge klein von der Ordnung ds ist.

Wenn $J(s)$ als ein über die Fläche Φ erstrecktes Flächenintegral $\int E' d\varkappa$ ausgedrückt erscheint, soll es immer mit $J(\Phi)$ bezeichnet werden, ein Werth, welcher natürlich alle Mal nur von der Contur der Fläche Φ und dem Sinne, in welchem diese gezogen gedacht wird, nicht von der übrigen Gestalt der Fläche Φ abhängt.

Componenten des Momentes J. (Consequenz.)

72. Wir betrachten dieselbe geschlossene Curve, wie im vorigen Abschnitte, beziehen sie auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem und zerlegen sie in unendlich viele Curvenelemente ds. Jedes derselben ersetzen wir durch eine geradgebrochene Linie, deren drei Stücke dx, dy, dz parallel den drei Coordinatenaxen sind, während der An-

fangspunkt des ersten und Endpunkt des letzten mit dem Anfangspunkte und Endpunkte von ds zusammenfällt. (In Fig. 18 für einen in einer der Coordinaten-Ebenen liegenden Strom gezeichnet). Den Inbegriff aller dx, dy und dz nennen wir die geradgebrochene Linie s'. Sei s die Contur einer Fläche Φ, s' die einer anderen Fläche Φ', welche sonst überall mit Φ zusammenfallen, nur am Rande entsprechend der dort zu erfüllenden Bedingung unendlich wenig abweichen soll. Es ist also dann:

Fig. 18.

$$J(s) = J(\Phi), \qquad J(s') = J(\Phi').$$

Nun weichen aber die beiden Flächen Φ und Φ' nur in Flächenelementen von einander ab, deren Summe einen unendlich kleinen Flächeninhalt liefert. Das Moment der unendlich kleinen Curven, die aus den vier Elementen ds, dx, dy, dz bestehen, muss nach dem Bewiesenen unendlich klein, wie der davon umschlossene Flächenraum sein; daher muss auch das Moment der Gesammtfläche, um welche Φ und Φ' verschieden sind, unendlich klein sein und der Unterschied zwischen $J(\Phi)$ und $J(\Phi')$ verschwinden. Geht man daher zu wirklichen Differenzialen über, so wird $J(\Phi) = J(\Phi')$ und daher auch $J(s) = J(s')$.

Bei Berechnung des Momentes kann also jedes Linienelement ds ersetzt werden durch seine drei Projectionen dx, dy, dz auf die drei Coordinatenaxen.

Sind die Momente dieser drei Projectionen Fdx, Gdy, Hdz, so ist also:

$$35) \qquad J(ds) = Fdx + Gdy + Hdz.$$

Momentenvektor.

73. Da das Moment nur von der Natur des Feldes und der Gestalt und Lage des Aufstroms abhängt, so können F, G, H überhaupt nur mehr von der Natur des Feldes und der Lage des Punktes abhängen, durch welche das Element ds gelegt wurde. Man kann also von jedem Punkte des Feldes aus eine Gerade $\mathfrak{A}$ ziehen, deren Projectionen

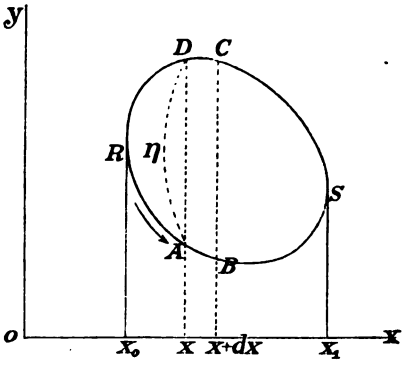
auf die drei Coordinatenaxen gleich den Werthen von F, G und H in dem betreffenden Punkte sind. Diese Gerade nennen wir den Momentenvector des betreffenden Punktes und das Moment eines durch diesen Punkt gezogenen Linienelementes ds ist dann nach Formel 35:

$$36) \qquad J(ds) = \mathfrak{A}\, ds \cos(\mathfrak{A}, ds).$$

Coordinatensystem mit Rechtsschraubendrehung (Weinrankendrehung).

74. Es soll jetzt speciell s die Contour eines unendlich kleinen Flächenelementes dx sein und $J(dx)$ nach Formel 30 und 35 berechnet werden. Damit keine Zweideutigkeit in der Bestimmung der Umlaufsrichtung eintrete, soll unser Coordinatensystem so gewählt werden, dass die positive y-Axe durch eine solche Drehung auf kürzestem Wege in die Lage der positiven z-Axe übergeht, wie sie eine gewöhnliche rechtsläufige in der positiven X-Richtung in einer fixen Mutter fortschreitende Schraube macht, also für ein auf der positiven X-Seite befindliches Auge dem Sinne des Uhrzeigers entgegen.[1]) Dasselbe soll für die beiden anderen Coordinatenaxen gelten, wenn x, y und z cyklisch vertauscht werden. Man erhält ein solches Coordinatensystem, wenn man die positive X-Axe nach vorn, die positive Y-Axe nach rechts, die positive Z-Axe nach oben zieht.

Fig. 19.



Stokes' Satz in der Ebene.

75. Liegt zunächst das Flächenelement dx in der xy-Ebene Fig. 19, wo die z-Axe gegen den Beschauer hingerichtet zu denken ist, so

[1]) Maxwell schlägt (treat. on el. vol. I art. 22) vor, dies ein Weincoordinatensystem zu nennen, da sich die Weinranke im selben Sinne windet, wenn die positive Coordinatenaxe die aufsteigende Stange ist. Das entgegengesetzte heisst dann „Hopfencoordinatensystem."

reducirt sich $J(d\varkappa)$ auf $\int(Fdx) + Gdy)$, was über die Contur von $d\varkappa$, die krumme Linie der Fig. 19 zu erstrecken ist.

Sei x_0 der kleinste Werth von x, welcher einem Punkte R dieser Contour zukommt, x_1 der grösste der dem Punkte S zukommen soll, x und $x + dx$ seien zwei beliebige Werthe von x, von denen der erste den beiden Punkten A und D, der letzte den beiden Punkten B und C der Contur zukommt. Dann ist:

$$\int F dx = \int_{RABS} F dx - \int_{RDCS} F' dx,$$

wobei F' irgend einen Werth des F in dem oberen Theile der Contur bezeichnet. Fassen wir das auf das Längendifferenziale AB bezügliche Element des ersten Integrales mit dem auf das Längendifferenzial DC des zweiten bezüglichen zusammen und ebenso das auf jedes Längendifferenzial bezügliche Element des ersten Integrals mit demjenigen Elemente des zweiten Integrals, das sich auf das vertikal darüber liegende Längendifferenzial bezieht, so wird:

$$\int F dx = \int_{x_0}^{x_1} (F - F')\, dx.$$

Wird die Ordinatendifferenz je zweier vertikal übereinander liegender Längendifferenziale mit η bezeichnet, so ist:

$$F' = F + \eta \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Da aber die ganze Contur nur unendlich klein ist, so kann $\partial F : \partial y$ für jeden Punkt derselben constant betrachtet und vor das Integralzeichen gesetzt werden. Da ferner: $\int_{x_0}^{x_1} \eta\, dx$ gleich dem Inhalte $d\varkappa$ der von der Contur umschlossenen Fläche ist, so hat man:

$$\int F dx = -\frac{\partial F}{\partial y} d\varkappa.$$

Genau ebenso findet man:

$$\int G dy = +\frac{\partial G}{\partial x} d\varkappa,$$

daher:

37) $$J(s) = \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}\right) d\varkappa.$$

Stokes' Satz im Raume.

76. Hieraus kann leicht der allgemeine Fall, dass $d\varkappa$ beliebig im Raume liegt, abgeleitet werden. Wir legen dann drei neue Coordinatenaxen (die der ξ, η, ζ), so dass die beiden ersten dem $d\varkappa$ parallel, die letzte darauf senkrecht ist und sich gegen die angenommene Umkreisungsrichtung von $d\varkappa$ so verhält wie die alte z-Axe zur Ueberführung der positiven x-Axe in die positive y-Axe auf kürzestem Wege (dass die Umkreisungsrichtung eine Weindrehung um die positive 0ζ-Richtung ist). Ausserdem sollen die drei neuen positiven Coordinatenaxen gegenüber den drei alten congruent sein. (Es sollen wieder Weincoordinaten sein.) Ist wieder $\mathfrak{A}$ der Vektor, dessen Componenten F, G, H sind, so hat man zunächst:

$$\int (F dx + G dy + H dz) = \int ds\, \mathfrak{A} \cos(\mathfrak{A}, ds) = \int (\Phi d\xi + \Psi d\eta),$$

wenn Φ und Ψ die Componenten des Vektors $\mathfrak{A}$ nach der neuen x- und y-Axe sind. Letzterer Werth ist aber nach dem soeben bewiesenen gleich:

38) $$d\varkappa \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}\right).$$

Ferner hat man bekanntlich, wenn die Cosinus der Winkel je zweier Coordinatenaxen nach dem beistehenden Schema bezeichnet werden:

	x	y	z
ξ	α	β	γ
η	α'	β'	γ'
ζ	α''	β''	γ''

$$\Phi = \alpha F + \beta G + \gamma H, \qquad \Psi = \alpha' F + \beta' G + \gamma' H,$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta} = \alpha' \frac{\partial}{\partial x} + \beta' \frac{\partial}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial}{\partial z}.$$

Substituirt man dies in den Ausdruck 38, so fällt $\partial F : \partial x$, $\partial G : \partial y$ und $\partial H : \partial z$ ganz heraus, die Grösse:

$$\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

erscheint mit $(\alpha\beta' - \alpha'\beta)\, d\varkappa = \gamma'' d\varkappa = dv$ [1]) multiplicirt, wobei $d\lambda$, $d\mu$, dv die Projectionen von $d\varkappa$ auf die drei Coordinatenebenen sind. Fällt die Umkreisungsrichtung von $d\varkappa$, sobald es um einen spitzen Winkel in die yx-Ebene gedreht wird, mit derjenigen Drehung um 0 zusammen, welche die positive y-Axe auf kürzestem Wege in die positive x-Axe überführt, ist also γ'' positiv, so ist auch dv positiv, sonst negativ zu bezeichnen. Da die übrigen Glieder des Ausdrucks 38 durch cyklische Vertauschung aus dem eben betrachteten folgen, so ergiebt sich schliesslich:

Vector, Componenten und Gleichungen der magnetischen Induktion.

$$39) \quad \begin{cases} J(s) = J(d\varkappa) = \int (F dx + G dy + H dz) \\ = a d\lambda + b d\mu + c dv = \mathfrak{B} d\varkappa \cos(\mathfrak{B}, n), \text{ wobei:} \end{cases}$$

$$40) \quad a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z}, \qquad b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y}$$

aus einem uns noch freilich verborgenen Grunde die Componenten der magnetischen Induktion genannt werden sollen. Die Gleichungen selbst sollen die Gleichungen der magnetischen Induktion heissen, und zwar nach ihrer Ableitung die Stokes'schen. (Das Wort Influenz wäre freilich im Gegensatz zur faradischen Induktion passender.) $\mathfrak{B}$ ist der Vektor (Induktionsvektor), dessen Projectionen auf die drei Coordinatenaxen gleich a, b, c sind. Die nach derselben Seite, wie früher 0ζ gerichtete Normale zu $d\varkappa$ wurde jetzt mit n bezeichnet. Umschliesst s eine endliche Fläche, so wissen wir bereits, dass $J(s)$ die Summe aller $J(d\varkappa)$ Flächenelemente derselben ist, also:

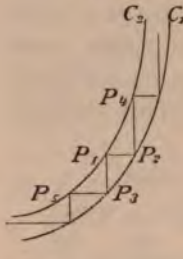
$$41) \quad \begin{cases} J(s) = \int (F dx + G dy + H dz) = \int J(d\varkappa) \\ = \int (a d\lambda + b d\mu + c dv) = \int \mathfrak{B} d\varkappa \cos(\mathfrak{B}, n). \end{cases}$$

Will man diese Gleichung lieber rein geometrisch, aus der Gleichung 37 ableiten, so verfahre man wie folgt: Man construire ein unendlich kleines Tetraëder, von dessen Kanten drei, die sich in der Spitze 0 treffen, den drei Coordi-

[1]) Kirchhoff, Vorlesungen über math. Physik 3. Aufl. S. 41 u. 42.

natenaxen parallel sind; die 0 gegenüberliegende Fläche des Tetraëders sei dx, die anderen drei Seitenflächen $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$. Man sieht sofort, dass $J(dx) = J(d\lambda) + J(d\mu) + J(d\nu)$ ist, da sich in der letzten Summe die Integrale über die in 0 zusammenstossenden Tetraëderkanten aufheben. Berechnet man $J(d\lambda)$, $J(d\mu)$ und $J(d\nu)$ nach Formel 37, so hat man sofort die Formel 39) für das Tetraëder. Man kann aber jede von irgend einer Curve s umschlossene Fläche Φ in lauter Dreiecke zerlegen, welche die Eigenschaften des obigen Dreiecks dx haben (Fig. 20). Man lege unendlich viele Ebenen in unendlich kleinen Abständen parallel der xy-Ebene. Diese sollen die Fläche Φ der Reihe nach in den Curven C_1, C_2, C_3 ... schneiden. Durch einen Punkt P_1 auf C_2 lege man zwei Ebenen parallel der xz- und yz-Ebene; diese schneiden im Vereine mit der Curve C_1 ein Dreieck aus der Fläche s aus; sie sollen die Curve C_1 in P_2 und P_3 schneiden. Man legt dann wieder durch P_2 eine der yz-, durch P_3 eine der xz-Ebene parallele Ebene; schneiden diese die Curve C_2 in P_4 und P_5, so legt man wieder durch P_4 eine der xz-, durch P_5 eine der yz-Ebene parallele Ebene u. s. f. So wird die Fläche Φ in lauter Dreiecke von der gewünschten Form zerlegt und man erhält auch die Gleichung 41.

Fig. 20.



Will man hinwiederum die Gleichung 39 ohne den Umweg über die Gleichung 37 ableiten, so lege man dx so im Raume, dass die im oben definirten Sinne dazu gezogene Normale n mit den drei positiven Coordinatenaxen spitze Winkel bildet (Fig. 21). Man zeichne auch die Projectionen dv und $d\lambda$ von dx auf die xy- und yz-Ebene; endlich lasse man eine Ebene E parallel der xz-Ebene fortwandern; ihre y-Coordinate sei y_0, wenn sie die Contur von dx zum ersten Male berührt, y_1 wenn ihr Durchschnitt mit der Contur wieder aufhört; in zwei Zwischenlagen, die einander unendlich benachbart sind, aber habe sie die y-Coordinaten y und $y + dy$. Wir nennen daher diese Lagen kurz die Lagen y und $y + dy$. Die Ebene E schneide in

der Lage y die Contur von $d\varkappa$ in den Punkten A und B. Es ist nun:

$$\int G\,dy = \int_{y_0}^{y_1} (G_B - G_A)\,dy.$$

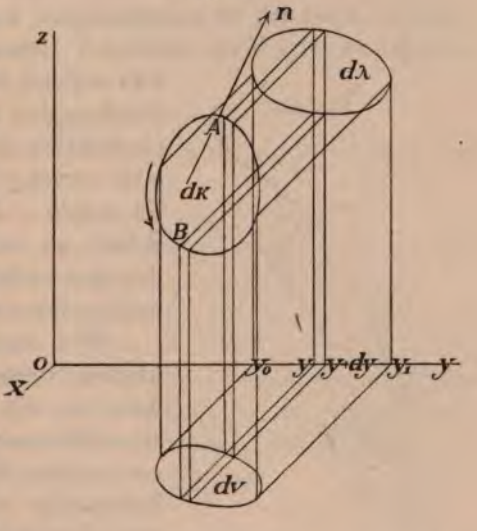
Habe A die Coordinaten x, y, z dagegen B die Coordinaten $x+\xi$, y, $z-\zeta$; so ist also:

$$G_B = G_A + \xi\frac{\partial G}{\partial x} - \zeta\frac{\partial G}{\partial z} \qquad \text{daher:}$$

$$\int G\,dy = \frac{\partial G}{\partial x}\int_{y_0}^{y_1}\xi\,dy - \frac{\partial G}{\partial z}\int_{y_0}^{y_1}\zeta\,dy = \frac{\partial G}{\partial x}\,d\nu - \frac{\partial G}{\partial z}\,d\lambda.$$

Da $\int H dz$ und $\int F dx$ durch cyklische Vertauschung gewonnen werden, so ist hiermit die Formel 39 erwiesen. Die Formeln 39 und 41 gelten mit unverändertem Zeichen für Hopfencoordinaten, wenn in denselben die Hopfendrehung als positive Drehung gewählt wird, d. h. also die Drehung von der positiven x-Axe auf kürzestem Wege gegen die positive y-Axe (also von der positiven z-Axe gesehen im Sinne des Uhrzeigers; entgegen einer gewöhnlichen Schraube, die in einer fixen Mutter in Richtung der wachsenden z fortschreitet). Natürlich muss dann auch die Normale n so gelegt werden, dass, wenn sie eine Hopfenstange und $d\varkappa$ der Erdboden wäre, die Drehung der Hopfenranke die gewählte Umkreisungsrichtung von $d\varkappa$ wäre. Wir aber wollen uns, entgegen sonstiger

Fig. 21.



Münchener Art, hier unter Verschmähung des Hopfens stets an den Wein halten.

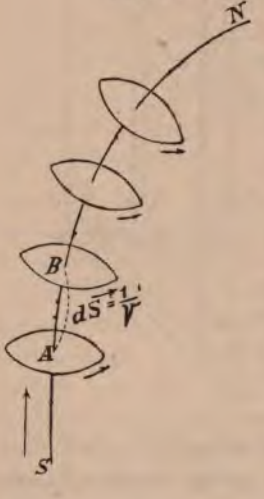
Ich bemerke noch, dass unsere Beweise rein geometrische waren, dass also in Gemässheit der Gleichungen 39 und 41 die Relation:

$$42) \quad \begin{cases} \int (F dx + G dy + H dz) = \int d\varkappa \left[\left(\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \right) \cos(n x) \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) \cos(n y) + \left(\frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \right) \cos(n z) \right] \end{cases}$$

stets besteht, wenn F, G, H beliebige Funktionen von x, y, z, ferner $d\varkappa$ ein beliebiges Flächenelement und n seine Normale ist und die Integration für Weincoordinaten wein-, für Hopfencoordinaten hopfenwendig über die Contur von $d\varkappa$ erstreckt wird.

77. Da ich die vorliegende Theorie die Maxwell'sche nannte, muss ich es entschuldigen, wenn ich im folgenden von Maxwell's Wege abweiche. Dieser betrachtet nämlich nun sogleich den Magnetismus, wodurch es den Anschein gewinnt, als ob derselbe als ein von der Elektricität verschiedenes Agens betrachtet würde. Um jeden derartigen Schein zu vermeiden, wollen wir dagegen zunächst bloss von Solenoiden sprechen.

Fig. 22.



Solenoide.

Wir dachten uns bisher die kleinen Ströme $d\varkappa$ so angeordnet, dass sie mit ihren Conturen aneinanderstossen. Wir wollen jetzt eine andere, die perlschnur-, rosenkranzartige oder solenoide Anordnung derselben betrachten. Sei eine beliebige Curve SN Fig. 22 durch beliebig viele äquidistante Punkte $(A, B, C..)$, von denen ν auf die Längeneinheit entfallen, in sehr kleine Elemente $dS = AB = BC... = 1:\nu$ getheilt. Eine gleiche Zahl congruenter

Scheibchen von sehr kleinem (nicht vielleicht gerade unendlich kleinem) Flächeninhalte $d\varkappa$ werde so angeordnet, dass alle senkrecht zur Curve und ihre Schwerpunkte in A, B, C... liegen. Die Contur eines jeden Scheibchens werde von einem elektrischen Strome von der (für jedes Scheibchen gleichen) Intensität i'_S durchflossen, und zwar weinwendig, d. h. da wir uns die Curve SN (und ebenso ihre Längenelemente dS) von S gegen N gerichtet denken, dem Sinne des Uhrzeigers entgegen, wenn das Auge vom Punkte N auf die Scheibchen blickt.

Das ganze System heisse das Solenoid S, welcher Buchstabe zugleich die Länge der Mittellinie SN des Solenoides bezeichnet. Befindet sich dasselbe in einem beliebig gegebenen elektrischen Felde, so ist das Moment des Stromes, welcher ein Scheibchen umkreist nach Formel 39 d. vor. Art.:

$$J(d\varkappa) = d\varkappa[a\cos(dS, x) + b\cos(dS, y) + c\cos(dS, z)].$$

Bezeichnet man die Projectionen des Elementes dS der Mittellinie auf die drei Coordinatenaxen mit dx, dy, dz, so ist wegen $dS = 1 : \nu$

$$J(d\varkappa) = \nu d\varkappa(adx + bdy + cdz).$$

Das Moment des ganzen Solenoides ist nach Gleichung 29 Art. 68:

43) $$J(S) = \nu d\varkappa \int(adx + bdy + cdz),$$

wobei die Integration von dem Anfangspunkte S bis zum Endpunkte N der Mittellinie zu erstrecken ist.

Es ist wichtig zu bemerken, dass a, b, c bloss von der Beschaffenheit des Feldes, in welchem sich das Solenoid befindet, dagegen die übrigen Grössen bloss von der Beschaffenheit des Solenoides abhängen, bis auf J, worin beiderlei Grössen gemischt vorkommen. Setzen wir:

44) $$\int(adx + bdy + cdz) = \varphi,$$

also:

45) $$a = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ b = \frac{\partial\varphi}{\partial y},\ c = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

so wird auch φ bloss von der Natur des Feldes, dem angenommenen Anfangswerthe und, wenn es kein vollständiges Differentiale sein sollte, vom Integrationswege abhängen. Es ist dann einfach: $J(S) = \nu\varphi d\varkappa$.

7. Erfahrungssatz. Aufgeschlossene Solenoide wirkt keine Kraft.

78. Multiplicirt man diesen Ausdruck mit $-l'_S$ und differentirt partiell nach den Coordinaten, welche Gestalt und Lage der Mittellinie des Solenoides bestimmen, so erhält man nach Gleichung 31 Art. 69 die ponderomotorischen Kräfte, welche im gegebenen Felde auf das Solenoid wirken. Wir nehmen nun als durch die Erfahrung gegeben an, dass auf geschlossene Solenoide, d. h. auf solche, für welche die beiden Punkte N und S zusammenfallen, in einem homogenen Medium niemals eine Kraft wirkt, wenn die Ströme des Feldes nicht durch die Scheibchen des Solenoides hindurchfliessen. Daraus folgt also, dass alle Differentialquotienten von φ nach allen, Gestalt und Lage der Mittellinie bestimmenden Variabeln Null sind; dass φ für ein geschlossenes Solenoid eine von Gestalt und Lage der Mittellinie vollkommen unabhängige Constante ist.

Wenn die Mittellinie des Solenoids nicht von den dem Felde angehörigen elektrischen Strömen umschlossen wird, so muss diese Constante gleich Null sein. Denn dann kann das Solenoid, ohne Ströme des Feldes zu durchkreuzen, in unendliche Entfernung gebracht werden. Wir nehmen aber an, dass in unendlicher Entfernung jede Wirkung des Feldes aufhört, dass also dort J, welches ja nach seiner Definition die Wechselwirkung zwischen Feld und Solenoid misst und nur Glieder enthält, die von dem Zusammenwirken beider abhängen, Null ist. Wäre das Solenoid ganz in einer von Elektricität durchströmten Schale eingeschlossen, so könnte ohne erhebliche Störung des Feldes in diese immer ein unendlich kleines Loch gemacht werden, durch welches das auf eine einzige Linie zusammengeschobene Solenoid hinaus und in unendliche Entfernung gebracht werden könnte.

Wird dagegen die Mittellinie des Solenoids von einem oder mehreren Strömen des Feldes umschlossen, so kann dasselbe nicht ohne Zerreissung oder Durchkreuzung in unendliche Entfernung gebracht werden; dann braucht φ nicht gleich Null zu sein, bleibt aber noch immer constant, wenn die Mittellinie ihre Gestalt beliebig ändert, so lange nur keiner der Ströme des Feldes durchkreuzt wird.

Daraus folgt nach bekannten Sätzen der Theorie der Differentialausdrücke, die besonders in der Theorie complexer Funktionen Anwendung finden, dass $d\varphi$ in jedem Raume, der nicht von den elektrischen Strömen des Feldes durchsetzt wird, ein vollständiges Differentiale ist und φ selbst eindeutig bleibt, solange nicht durch den Integrationsweg Ströme des Feldes umfasst werden.

Kräfte auf offene Solenoide.

79. Ist das Solenoid ein ungeschlossenes, so werden also bloss Kräfte vorhanden sein, welche auf seinen Anfangspunkt und Endpunkt wirken; auf alle anderen Variabeln, welche bloss den Verlauf der Mittellinie zwischen diesen beiden Punkten bestimmen, werden keine Kräfte wirken. Bezeichnen wir den Werth von φ für den Punkt N mit keinem Index, den für den Punkt S aber mit einem Striche, so wird nach Gleichung 43 für ein homogenes Medium:

$$J(S) = \nu d\varkappa(\varphi - \varphi').$$

Sind x, y, z die Coordinaten des Punktes N und X, Y, Z die Componenten der auf diesen Punkt im Felde wirkenden Kraft und setzt man das Produkt

46) $$\nu l'_S \, d\varkappa = m,$$

so findet man also:

47) $$X = -m\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad Y = -m\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad Z = -m\frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

oder nach den Gleichungen 45:

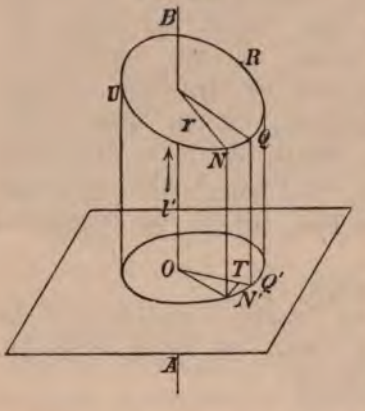
48) $$X = -ma, \; Y = -mb, \; Z = -mc.$$

Dieselben aber gerade entgegengesetzt bezeichneten Ausdrücke gelten für das andere Ende S des Solenoides.

Wir können jetzt N als den Nordpol des Solenoides und m als die Intensität dieses Nordpols bezeichnen. Es ist die Menge Nordmagnetismus, welche daselbst concentrirt gedacht werden müsste, um die Wirkung des Solenoids zu ersetzen. Eine gleiche Menge Südmagnetismus müsste natürlich in S concentrirt gedacht werden. Durch die Zahl m ist das Solenoid vollkommen charakterisirt. Alle Solenoide, für welche m und die Lage der beiden Enden dieselbe ist, verhalten sich in allen ihren Wirkungen vollkommen gleich.

80. Der Fall, wo die Mittellinie des Solenoids von elektrischen Strömen umschlossen wird, also φ mehrdeutig ist, bedarf einer näheren Erläuterung. Wir denken uns da zunächst einen unendlichen geradlinigen Strom (Fig. 23) AB von der Intensität l' und der Richtung von A gegen B und in der Entfernung r davon den Nordpol N eines Solenoides von der Intensität m, während sich der Südpol des Solenoides in so grosser Entfernung befindet, dass er keine bemerkbare Einwirkung erfährt.

Fig. 23.



8. Erfahrungssatz. Biot-Savart's Fundamentalversuch.

Wir nehmen als durch die Erfahrung gegeben an, dass die Kraft P, welche ein solcher Strom auf den Solenoidpol ausübt, erstens der Intensität des Stromes l', zweitens der Intensität m des Solenoidpols proportional, drittens der Entfernung beider r verkehrt proportional ist und viertens auf der Ebene ABN senkrecht steht und ihrem Sinne nach durch die bekannte Ampère'sche Schwimmerregel definirt ist. Der Nordpol wird also weinwendig, d. h. wenn das Auge von B aus darauf blickt, dem Uhrzeiger entgegen um den Strom herumgedreht. Diese Gesetze wurden von Biot und Savart (freilich für einen Magnetpol) experimentell geprüft. Wir setzen daher, um mit Maxwell's Bezeichnung der Constante in Einklang zu bleiben:

$$P = 2\mu m l' : r.$$

Es ist nun die Arbeit zu berechnen, welche geleistet wird, wenn der Strom fix ist, aber der Solenoidpol eine beliebige geschlossene Curve $NQRU$ Fig. 23 beschreibt. Sei NQ ein Element dieser Curve, $N'Q'$ dessen Projection auf eine Ebene, welche durch einen beliebigen Punkt O des Stromes senkrecht zu diesem gezogen ist und $N'T \perp ON'$. Dann hat $N'T$ die Richtung der Kraft P und es ist die

Arbeit, welche vom Solenoidpole auf dem Wege NQ geleistet wird:

$$P \times N'T = 2\mu ml' \times \measuredangle N'OT.$$

Beschreibt daher N eine geschlossene Curve, so ist die Arbeit gleich Null, wenn diese den Strom nicht umfasst, dagegen $4\pi\mu ml'$, wenn sie den Strom einmal weinwendig umschlingt. Es ist noch zu bemerken, dass dies die Arbeit ist, welche bei Bewegung des Pols in sichtbare lebendige Kraft oder in Arbeit gegen die die Bewegung verlangsamenden Aussenkräfte verwandelt, also der Energie des Mediums entzogen und durch die galvanische Batterie wieder nachgeliefert wird, die den Gegeninduktionsstrom in AB aufheben muss.

Neunte Vorlesung.

Elektrische Ströme in Körpern.

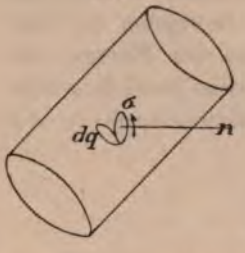
81. Wir gehen nun wieder zur Betrachtung eines völlig neuen Falles über. Wir setzten bisher immer nur lineare Stromfäden voraus. Wir wissen aber, dass auch räumliche dreidimensionale Körper von Elektricität durchströmt werden können; ja dass das letztere sogar der einzig praktisch realisirbare Fall ist, der sich dem eines linearen Stromfadens nur mehr oder minder nähern kann. *Strömung im Raum.*

In einem solchen räumlich ausgedehnten, von Elektricität durchströmten Körper hat aber die elektrische Strömung an jeder Stelle eine bestimmte Richtung, und weder diese noch die Intensität der Strömung ändert sich sprungweise (höchstens mit Ausnahme verschwindend weniger Stellen), so dass wir für alle unmittelbar benachbarten Punkte Stromrichtung und Intensität im Allgemeinen gleich voraussetzen können. Wir können uns die Sache dann immer so denken, als ob der Körper von unendlich vielen unendlich dicht aneinander liegenden Stromfäden durchzogen *9. Erfahrungssatz. Ströme in Körpern sind ebenfalls gerichtet.*

würde, deren jeder die früher einzelnen Stromfäden beilegten Eigenschaften besitzt.

Wir legen durch einen Punkt P des Körpers ein unendlich kleines Flächenelement dq Fig. 24 senkrecht zu den Stromfäden. Mdq sei die Zahl der Stromfäden, welche durch dq hindurchgehen, l' die Stromintensität in einem einzelnen derselben. Wir können also M als die Zahl der Stromfäden bezeichnen, die durch die Einheit des Querschnittes normal hindurchgehen, oder besser gesagt, hindurchgehen würden, wenn der Strömungszustand, der gerade im Punkte P herrscht, in einem endlichen Theile des Körpers gleichmässig herrschen würde. Das Produkt Ml' nennen wir die Stromdichtigkeit im Punkte P. Da wir uns den elektrischen Strom nicht nothwendig als Strom eines Fluidums denken, wollen wir es noch als eine besondere Hypothese auffassen, dass mehrere unendlich nahe parallele Ströme einem einzigen äquivalent sind, dessen Intensität gleich der Summe ihrer Intensitäten ist. Freilich wäre ohne diese Hypothese die Aufstellung von Formeln für räumliche Ströme kaum möglich. Theilt sich dann ein Büschel von Stromfäden, die anfangs unendlich nahe waren, in zwei getrennte Büschel, so haben wir den Vorgang der Stromverzweigung.

Fig. 24.



Stromdichtigkeit.

4. Hypothese. Superpos. der Wirkung unendlich naher Ströme.

82. Wir denken uns nun einen Solenoidpol an die betreffende Stelle gebracht und berechnen nach zwei Methoden die Arbeit A, welche derselbe leistet, wenn er eine beliebige unendlich kleine, in einer Ebene liegende, durch den Punkt P gehende geschlossene Curve σ in einer bestimmten Umkreisungsrichtung durchläuft. Durch Gleichsetzung beider Werthe von A gewinnen wir dann drei Gleichungen.

Die Arbeit, welche bei der Bewegung durch ein Längenelement $d\sigma$ der Curve geleistet wird, ist nach Formel 32 Art. 69:

49) $$A = -l'_S dJ(S),$$

wobei $dJ(S)$ die Veränderung ist, welche das Moment des

Feldes $J(S)$ auf das Solenoid erfährt, wenn der Pol die Strecke $d\sigma$ zurücklegt. Wir denken uns nun im Körper einen den Punkt P umschliessenden Cylinder Z construirt (Fig. 24), der zwar auch unendlich klein, aber unendlich gross gegenüber der Curve σ ist. Seine Axe soll die Länge ds haben und parallel den Stromfäden sein. ds soll sehr gross gegenüber den Querdimensionen des Cylinders und diese wieder sehr gross gegenüber der Curve σ sein.

Wir theilen A in zwei Summanden B und C; B soll diejenigen Glieder der Gleichung 49 enthalten, die von allen ausserhalb des Cylinders liegenden Stromtheilen herrühren, also die Arbeit darstellen, welche gegen die von ihnen ausgeübten Kräfte geleistet wird. C dagegen bezieht sich auf die innerhalb des Cylinders liegenden Stromtheile.

Wir können uns die Mittellinie des Solenoids dabei beliebig biegsam und ausserhalb des Cylinders Z bei der Arbeitsleistung A immer nur sich in sich selbst verschiebend denken. Dann wird also keiner der ausserhalb Z liegenden Stromtheile vom Pole umkreist; es ist keine Veranlassung zu einer Discontinuität oder Mehrdeutigkeit des Integrales 44 für diese Ströme vorhanden. Daher ist für sie Anfangs- und Endwerth von $J(S)$ gleich und der Ausdruck 49 (vgl. Gleichung 43) über die geschlossene Curve σ integrirt liefert für sie den Werth Null. Es ist also $B = o$.

Bei Berechnung von C aber kann man jeden innerhalb des Cylinders Z liegenden Stromfaden als Gerade und unendlich lang betrachten. Es ist also nach dem am Schlusse der vorigen Vorlesung Gefundenen die Arbeit ebenfalls gleich Null für alle Stromfäden, welche nicht durch die Curve σ hindurchgehen. Für alle Stromfäden zusammengenommen, welche hindurchgehen, ist die Arbeit

$$50) \qquad C = A = 4\pi\mu m M l' dq.$$

Man würde noch einfacher zum Ziele gelangen, wenn man sich bei Ableitung dieser Formel auf neuere Versuche von Joubin[1]) beriefe, welcher direct die Kräfte experimen-

[1]) Joubin, Compt. rend. der Par. Akad. Bd. 110 p. 231.

tell bestimmte, die auf einen in durchströmter Kupfersulfatlösung tauchenden Magnetpol wirken. Da aber diese Versuche weniger bekannt sind und ihr Resultat auch vielleicht weniger zweifellos feststeht, so zog ich es vor, von den Versuchen Biot's und Savart's auszugehen.

Componenten der Stromdichte.

82. Wir bezeichnen nun die drei Grössen:

$$51) \qquad u = Ml' \cos(l', x), \qquad v = Ml' \cos(l', y),$$
$$w = Ml' \cos(l', z),$$

(wobei l' die Richtung der positiven Strömung ist, die mit der Cylinderaxe ds zusammenfällt), als die Componenten der Stromdichte im Punkte P, ferner den von der Curve σ umschlossenen Flächeninhalt mit $d\varkappa$, endlich die Normale zu dieser Curve mit n. Der Sinn dieser Normalen ist wieder so zu wählen, dass die angenommene Umkreisungsrichtung der Curve σ die weinwendige ist. Es ist dann:

$$dq = d\varkappa \cos(l', n) = d\varkappa [\cos(l', x)\cos(n, x) + \cos(l', y)\cos(n, y) + \cos(l', z)\cos(n, z)].$$

Daher liefert Formel 50:

$$52) \quad A = 4\pi\mu m d\varkappa [u\cos(n, x) + v\cos(n, y) + w\cos(n, z)].$$

Nun wollen wir die Grösse A nach der zweiten Methode berechnen, indem wir die Kräfte X, Y, Z, welche auf den Solenoidpol wirken, den Gleichungen 48 entnehmen. Damals wurde (siehe Gleichung 46 und 47) gesetzt:

$$X = -l'_s \frac{\partial J(S)}{\partial x} = -l'_s l' \frac{\partial C}{dx}.$$

Die letzte Gleichung folgt aus dem am Schlusse des Art. 64 Gesagten. C ist die in der vierten und fünften Vorlesung so bezeichnete Grösse. Aus Gleichung 19 Art. 50 und dem unmittelbar nach ihrer Entwickelung Gesagten folgt, dass $-Xdx - Ydy - Zdz$ die der elektrokinetischen entnommene, in sichtbare verwandelte Energie ist. Substituiren wir in diesen Ausdruck die Werthe 48 und integriren wir über die Curve σ, so erhalten wir:

$$A = mf(adx + bdy + cdz).$$

Da, wie wir bereits bemerkten, die Formel 42 Art. 76 immer gilt, wenn darin F, G, H beliebige Funktionen von

x, y, z sind, so können wir daselbst auch a, b, c für F, H, G substituiren, und erhalten:

$$A = m d\varkappa \left[\left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right) \cos(n,x) + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{dx} \right) \cos(n, y) + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right) \cos(n, z) \right].$$

Setzen wir dies dem Ausdrucke 52 gleich und bedenken, dass die Gleichheit für ganz beliebige Werthe der Cosinus gelten muss, so erhalten wir die drei Gleichungen: *Stokes' Stromgleichungen.*

$$53) \quad \begin{cases} 4\pi\mu u = \dfrac{\partial c}{\partial y} - \dfrac{\partial b}{\partial z}, & 4\pi\mu v = \dfrac{\partial a}{\partial z} - \dfrac{\partial c}{\partial x}, \\ 4\pi\mu w = \dfrac{\partial b}{\partial x} - \dfrac{\partial a}{\partial y}.^{1}) \end{cases}$$

83. Es handelt sich noch darum, auch die Bedeutung der übrigen Grössen bei der Strömung in körperlichen Leitern zu fixiren. Wenn wir zunächst zur Gegenkraft der Bewegungshindernisse übergehen wollen, so haben wir strenge zwischen Leitern und Dielektricis zu unterscheiden. Da das Wort „Widerstand" leider zur Bezeichnung des mit ω bezeichneten galvanischen Leitungswiderstandes gebräuchlich ist, so müssen wir uns wohl hüten, statt „Gegenkraft der Bewegungshindernisse" ebenfalls das Wort „Widerstand"

---

[1]) Das bisher Gesagte gilt nur im homogenen isotropen Medium. Eine an verschiedenen Stellen verschieden concentrirte Eisenchloridlösung giebt ein Beispiel eines inhomogenen isotropen Mediums. Versuche in solchen Medien liegen noch gar nicht vor. Am ersten kann man noch aus den Grenzbedingungen, die für Trennungsflächen zweier verschiedener Körper gelten, also gewissermaassen durch Umkehrung der Methode, welche die Grenzschichten als dünne, aber continuirliche Uebergänge betrachtet, auf das Verhalten solcher Medien einen Schluss ziehen. So viel ist sicher, dass geschlossene Solenoide, welche auch im Innern von einem inhomogenen Medium erfüllt sind, Kräfte nach Aussen ausüben würden und dass daher die einfachste Verallgemeinerung unserer Gleichungen darin besteht, dass wir für solche Medien setzen:

$$54) \quad \begin{cases} 4\pi u = \dfrac{\partial(c:\mu)}{y} - \dfrac{\partial(b:\mu)}{\partial z}, & 4\pi v = \dfrac{\partial(a:\mu)}{\partial z} - \dfrac{\partial(c:\mu)}{\partial x}, \\ 4\pi w = \dfrac{\partial(b:\mu)}{\partial x} - \dfrac{\partial(a:\mu)}{\partial y}. \end{cases}$$

zu gebrauchen, weil sonst Verwechslungen dieser, wie schon im Artikel 43 auseinandergesetzt wurde, total verschiedenen Grössen unvermeidlich wären.

5. Hypothese. Jedes Längenelement liefert zu ω einen unabhängigen Betrag.

Betrachten wir zunächst einen Leiter: daselbst ist die Gegenkraft der Bewegungshindernisse in einem einzelnen Stromfaden $W = \omega l'$. Wir setzen voraus, dass sich gerade so, wie es für die elektromotorischen Kräfte schon durch die dritte Hypothese Artikel 61 bedingt ist, auch diese Gegenkraft aus unendlich vielen Summanden zusammensetzt, von denen je einer $l' d\omega$ von je einem Elemente ds des Stromfadens herrührt, und dass dann die in der vierten und fünften Vorlesung entwickelten allgemeinen mechanischen Beziehungen nicht bloss für jeden Stromfaden als Ganzes, sondern auch für jedes Element ds desselben gelten. Dann ist also:

$$W = \int l' d\omega = \int \frac{d\omega}{M} M l'.$$

Den Werth von Ml' erhält man, wenn man die Gleichungen 51 der Reihe nach mit $\cos(l', x)$, $\cos(l', y)$, $\cos(l', z)$ multiplicirt. Es folgt dann:

$$W = \int \frac{d\omega}{M} [u \cos(l', x) + v \cos(l', y) + w \cos(l', z)].$$

6. Hypothese. Die elektromotorische Kraft lässt sich in Componenten zerlegen.

Seien ferner ξ, η, ζ die Componenten der äusseren Kräfte, welche die Bewegung der Elektricität in dem Elemente ds unseres Stromfadens antreiben; dann ist die Kraft, welche in der Richtung von l' wirkt,

$$\xi \cos(l', x) + \eta \cos(l', y) + \zeta \cos(l', z),$$

daher die Gesammtkraft im Stromfaden:

$$\int [\xi \cos(l', x) + \eta \cos(l', y) + \zeta \cos(l', z)].$$

Endlich ist nach Formel 30 und 35 Art. 68 und 72:

$$J(s) = \int ds [F \cos(l', x) + G \cos(l', y) + H \cos(l', z)].$$

Wenn keine sichtbare Bewegung der ponderablen Körper eintritt, wird also:

$$\frac{dJ(s)}{dt} = \int ds \left[\frac{dF}{dt} \cos(l', x) + \frac{dG}{dt} \cos(l', y) + \frac{dH}{dt} \cos(l', z)\right].$$

Die Gleichung 28 Art. 67 liefert daher:

$$55)\quad \begin{cases} \int[\xi\cos(l',x)+\eta\cos(l',y)+\zeta\cos(l',z)] \\ =\int ds\left[\frac{dF}{dt}\cos(l',x)+\frac{dG}{dt}\cos(l',y)+\frac{dH}{dt}\cos(l',z)\right] \\ +\int\frac{d\omega}{M}[u\cos(l',x)+v\cos(l',y)+w\cos(l',z). \end{cases}$$

Nach den gemachten Annahmen muss die obige Gleichung für alle Elemente ds einzeln erfüllt sein; es muss also zunächst sein:

$$\xi = X_1\,ds,\ \eta = Y_1\,ds,\ \zeta = Z_1\,ds,$$

wobei X_1, Y_1, Z_1 endliche Grössen sind und die Componenten der die galvanisch geleitete Strömung im betreffenden Punkte des Körpers antreibenden äusseren elektromotorischen Kraft (Chemismus, Thermoelektricität) darstellen. *Componenten der galvanischen Kraft.*

Ferner muss sein

$$d\omega = \frac{M\,ds}{C},$$

wobei die endliche Grösse C die specifische Leitungsfähigkeit des Körpers im betreffenden Punkte heissen soll. Diese Formel zeigt zugleich, dass der galvanische Widerstand $d\omega$ des Elementes des Stromfadens der Länge ds desselben direct und dem Querschnitte verkehrt proportional ist, da ja M Stromfäden auf die Querschnittseinheit entfallen und folglich $1 : M$ als Querschnitt eines Fadens zu betrachten ist. *Specifische Leitungsfähigkeit.*

Die Anwendung der Gleichung 55 auf ein einzelnes Element liefert nach Substitution dieser Werthe:

$$56)\quad u = C\left(X_1 - \frac{dF}{dt}\right),\quad v = C\left(Y_1 - \frac{dG}{dt}\right),\quad w = C\left(Z_1 = \frac{dH}{dt}\right).$$

84. Für die in der Zeit δt in einem Stromfaden von der Länge ds entwickelte Joule'sche Wärme liefert die Gleichung 17 (Art. 50): *Joule's Wärme im Volumelemente.*

$$d\omega\, l'^2\,\delta t = \frac{M\,ds}{C}\,l'^2\,\delta t.$$

Das Volumelement von der Länge ds und dem Querschnitte dq, also dem Volumen $dq\,ds = d\tau$ enthält Mdq solcher

Fäden, daher ist die darin während der Zeit δt entwickelte Joule'sche Wärme Mdqmal so gross, also gleich:

$$57) \qquad dI = \frac{M^2 d\tau}{C} l'^2 \delta t = \frac{d\tau \delta t}{C}(u^2 + v^2 + w^2).$$

Elektrokinetische Energie eines Volumelementes.

Die elektrokinetische Energie in einem Elemente ds eines Stromfadens ist nach Gleichung 33 (Art. 70):

$$\frac{l'}{2} J(s) = \frac{l'}{2} ds [F\cos(l', x) + G\cos(l', y) + H\cos(l', z)],$$

die im Volumelemente $d\tau$ von der Länge ds und der Querschnitte dq also:

$$58) \quad \begin{cases} dE = \dfrac{Ml'}{2} d\tau [F\cos(l', x) + G\cos(l', y) + \cos(l', z)] \\ \qquad = \dfrac{d\tau}{2}(uF + vG + wH). \end{cases}$$

Componenten der dielektrischen Polarisation.

85. Genau so nehmen wir in einem Volumelemente $d\tau$ von der Länge ds und dem Querschnitte dq eines Dielektricums Mdq parallele, durch Aenderung einer dielektrischen Verschiebung l entstehende Ströme an. Nur ist jetzt die Gegenkraft der Bewegungshindernisse W dem undifferentiirten l proportional. Wir müssen daher setzen:

$$59) \quad Ml\cos(l, x) = f, \qquad Ml\cos(l, y) = g, \qquad Ml\cos(l, z) = h;$$

Reibungselektromotorische Kraft.

f, g, h sollen die Componenten der dielektrischen Polarisation der Volumeneinheit heissen. Wir wollen ferner die Componenten der im Dielektricum wirkenden äusseren elektromotorischen Kräfte mit X_2, Y_2, Z_2 bezeichnen und sie die Componenten der reibungselektromotorischen Kräfte nennen, womit wir nicht etwa behaupten wollen, dass im Dielektricum nur durch Reibung Elektricität erregt werden könnte, ja nicht einmal, dass überhaupt die mechanische Reibung die eigentliche Ursache der Elektricitätserregung daselbst sei.[1]) Diese drei Grössen treten in der Gleichung 55 an die Stelle von X_1, Y_1, Z_1; an Stelle von u, v, w tritt

$$\frac{df}{dt}, \quad \frac{dg}{dt}, \quad \frac{dh}{dt};$$

[1]) Um dies sowie schwerfällige Wortzusammensetzungen zu vermeiden und gleichzeitig einen sicher Würdigen nach beliebten Mustern zu feiern, könnte man dem Galvanismus den Guerikismus gegenüberstellen und X_2, Y_2, Z_2 die guerikischen Kräfte nennen.

endlich an Stelle von C eine andere Constante $k : 4\pi$, welche wir die Dielektrisirungszahl oder Dielektricitätsconstante nennen wollen. Gerade so, wie wir aus der Gleichung 55 die Gleichungen 56 gewonnen haben, so ergeben sich jetzt die folgenden Gleichungen: *Dielektrisirungszahl.*

$$60) \quad \begin{cases} 4\pi f = k\left(X_2 - \dfrac{dF}{dt}\right), \quad 4\pi g = k\left(Y_2 - \dfrac{dG}{dt}\right), \\ 4\pi h = k\left(Z_2 - \dfrac{dH}{dt}\right). \end{cases}$$

Dielektrisirungsgleichungen.

Für die Energie der dielektrischen Polarisation im Volumelemente $d\tau$ aber ergiebt sich aus der Gleichung 18 (Art. 50): *Energie der dielektrischen Polarisation in einem Volumelemente.*

$$61) \quad d\Pi = \frac{2\pi d\tau}{k}(f^2 + g^2 + h^2).$$

Es ist hierbei noch wohl zu bemerken, dass im Dielektricum die Stromcomponenten u, v, w immer die Werthe

$$62) \quad \frac{df}{dt}, \quad \frac{dg}{dt}, \quad \frac{dh}{dt}$$

haben, welche Werthe namentlich auch, sobald es sich um ein Dielektricum handelt, in den Stokes'schen Stromgleichungen 53 und 54 Art. 82 substituirt gedacht werden müssen.

7. Hypothese. Superpositionsprincip im leitenden Dielektricum.

86. Selbstverständlich giebt es zwischen reinen Leitern und reinen Isolatoren Zwischenstufen, sogenannte Halbleiter oder besser gesagt, leitende Dielektrica; denn die wesentlichste Eigenschaft derselben besteht weniger in ihrem zumeist sehr grossen Leitungswiderstand, sondern vielmehr darin, dass neben der elektrischen Leitung sich darin auch dielektrische Polarisation bemerkbar macht.

Die experimentelle Untersuchung dieser Zwischenstufen bietet gerade die grössten Schwierigkeiten, da die Oberflächenleitung und ausserdem bei festen Körpern die Inhomogenität, bei Flüssigkeiten der Feuchtigkeitsgehalt und anderes sehr stören; daher ist es erklärlich, dass ausser einigen bestätigenden Versuchen von Cohn und Arons[1]) die Maxwell'sche Annahme über das Verhalten dieser Halbleiter noch keine experimentelle Prüfung gefunden hat und

[1]) Wied. Annalen Bd. 28, S. 454, 1886; Bd. 33, S. 13, 1888.

daher heutzutage wohl noch als Hypothese bezeichnet werden muss. Dieselbe besteht darin, dass in Halbleitern dielektrische Polarisation und galvanische Leitung sich unbehindert superponiren, die eine durch die Dielektrisirungsgleichungen 60, die andere durch die Widerstandsgleichungen 56 bestimmt. Die äusseren elektromotorischen Kräfte, welche auf die dielektrische Polarisation wirken, können dabei möglicherweise andere sein und daher andere Werthe haben, wie diejenigen, welche auf die galvanische Leitung wirken; daher wurde zwischen X_1, Y_1, Z_1 und X_2, Y_2, Z_2 unterschieden. Als elektromotorische Kräfte der Induction aber:

$$dF:dt,\ dG:dt,\ dH:dt$$

sind in beiden Fällen dieselben Werthe einzuführen, und zwar ist bei ihrer Berechnung die gesammte elektrische Stromstärke, sowohl die galvanische als auch die durch Aenderung der dielektrischen Polarisation bedingte, welche letztere durch die Ausdrücke 62 gegeben ist, einzuführen.

Componenten des totalen und des galv. geleiteten Stromes. Um Irrungen vorzubeugen, wollen wir daher jetzt die Componenten der gesammten elektrischen Strömung mit u, v, w, die der galvanisch geleiteten Strömung allein aber mit p, q, r bezeichnen, so dass wir haben:

Superpositionsgleichungen.

$$63) \qquad u = p + \frac{df}{dt}, \qquad v = q + \frac{dg}{dt}, \qquad w = r + \frac{dh}{dt}.$$

Widerstandsgleichungen. Wir erhalten dann statt der Gleichungen 56 die folgenden:

$$64) \qquad \begin{cases} p = C\left(X_1 - \frac{dF}{dt}\right), \qquad q = C\left(Y_1 - \frac{dG}{dt}\right), \\ r = C\left(Z_1 - \frac{dH}{dt}\right). \end{cases}$$

In den Gleichungen 53 und 54 dagegen ist nicht p, q, r für u, v, w zu substituiren, sondern diese Gleichungen gelten ungeändert für das leitende Dielektricum und u, v, w haben in denselben die durch die Gleichungen 63 definirte Bedeutung.

Ist die Hypothese, welche diesen Gleichungen zu Grunde liegt und von uns als die 7. bezeichnet wurde, auch heute noch nicht ganz feststehend, so fassen unsere Gleichungen doch jedenfalls in der einfachsten Weise die für Leiter

und Nichtleiter geltenden Relationen einheitlich zusammen, indem sie in die für Leiter geltenden übergehen, wenn wir die Dielektrisirungszahl $k = o$ setzen, dagegen in die für Dielektrica geltenden, wenn die Leitungsfähigkeit $C = o$ ist.

Man sieht leicht, dass diese für leitende Dielektrica aufgestellten Gleichungen ganz denjenigen entsprechen, welche wir für das durch Fig. 9 dargestellte Schema fanden und in Artikel 53 als die Gleichungen 23 bezeichneten. Den dort mit M_1 oder M_2 bezeichneten Kräften entsprechen jetzt X_1, Y_1, Z_1, den mit N_1, N_2 bezeichneten X_2, Y_2, Z_2; den Grössen n (n_1 oder n_2) und m' entsprechen f, g, h und p, q, r, den l' aber u, v, w; endlich den Constanten ω und ϑ die jetzt gebrauchten Constanten $1 : C$ und $4\pi : k$.

Zehnte Vorlesung.

Gesetze der stationären und angenähert stationären Strömung.

87. Wir haben nun die Aufgabe der Ableitung der Grundgleichungen im Wesentlichen gelöst und es ist hier nicht meine Absicht, mich in eine weitläufige Anwendung derselben auf specielle Fälle einzulassen. Nur die Herleitung der einfachsten Grundgleichungen der alten Elektricitätstheorie und Optik soll noch angeschlossen werden, damit der Sinn der gefundenen Gleichungen nach keiner Richtung dunkel bleibe. Wir wollen zunächst einige Gleichungen ableiten, welche nur Consequenzen der vorhergehenden Formeln darstellen, aber deren Kenntniss für die weiteren Entwickelungen unerlässlich ist.

Aus den drei Gleichungen 40 (s. *A* der Zusammenstellung in Art. 88) folgt sofort:

65) $$\frac{da}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = o.$$

Continuitätsgleichung der Induktion.

Ebenso folgt aus den Gleichungen 53 und 54:

Continuitätsgleichung der Strömung.

66) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = o.$$

Die Grössen X_1, Y_1, Z_1 haben nur an Stellen, wo galvanische Elemente thätig sind oder durch Temperaturdifferenzen thermoelektromotorische Kräfte erzeugt werden, die Grössen X_2, Y_2, Z_2, nur dort, wo gerade Reibungselektricität entwickelt wird, von Null verschiedene Werthe. Schliessen wir zunächst solche singuläre Stellen von der Betrachtung ganz aus, so vereinfachen sich die Gleichungen 60 und 64 und gehen über in:

67) $$p = -C\frac{dF}{dt}, \quad q = -C\frac{dG}{dt}, \quad r = -C\frac{dH}{dt},$$

68) $$4\pi f = -k\frac{dF}{dt}, \quad 4\pi g = -k\frac{dG}{dt}, \quad 4\pi h = -k\frac{dH}{dt}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$u = p + \frac{df}{dt} = -C\frac{dF}{dt} - \frac{k}{4\pi}\frac{d^2F}{dt^2}.$$

Bilden wir die entsprechenden Gleichungen für v und w und addiren alle drei, nachdem wir die erste nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differenzirt haben, so finden wir unter Berücksichtigung der Gleichungen 66 im homogenen Medium:

$$k\frac{d^2\Theta}{dt^2} + 4\pi C\frac{d\Theta}{dt} = o,$$

wobei

69) $$\Theta = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \text{ ist.}$$

Hieraus folgt:

70) $$\Theta = C_1 e^{-\frac{4\pi C}{k}t} + C_2.$$

Diese Gleichung hängt auf's Innigste zusammen mit den Gleichungen 89—93, welche wir später in Art. 97 und 98 erhalten werden. Vorläufig wollen wir uns mit den folgenden, schon jetzt erforderlichen Bemerkungen begnügen.

Sei in dem betreffenden Raume irgend ein Mal weder ein Magnet, noch ein elektrischer Strom, noch sonst eine

elektrische Wirkung vorhanden gewesen, so dass zu dieser Zeit überall die magnetischen und elektrischen Kräfte $= o$ waren, was wir den neutralen Zustand des Feldes und der darin befindlichen Körper nennen wollen. Dann muss das Feld damals auf ein etwa hineingebrachtes Solenoid oder Stromelement gar keine Kraft ausgeübt haben; es müssen also die Differentialquotienten von F, G, H nach allen Coordinaten gleich 0 gewesen sein, denn diese Differentialquotienten multiplicirt mit der Stromintensität und Projection des Stromelementes liefern die Kräfte, welche das Feld auf das Stromelement ausübt, mit Ausschluss der Wirkung des hineingebrachten Stromes auf sich selbst; daher muss zur in Rede stehenden Zeit $\Theta = d\Theta : dt = o$ gewesen sein. Haben seit dieser Zeit an einem Punkte des Feldes niemals elektromotorische Kräfte gewirkt, so haben seit dem die Gleichungen 67, 68 bis 70 gegolten. Daher müssen in der letzten dieser Gleichungen die Constanten C_1 und C_2 und daher auch

71) $$\Theta = o$$

sein. Diese Gleichung hört jedoch in dem Momente, wo im betrachteten Punkte selbst galvanische Elemente, thermoelektromotorische oder reibungselektromotorische Kräfte thätig sind, zu gelten auf.

Zusammenstellung der Vektoren.

88. Behufs leichterer Uebersicht, sowohl für das folgende als auch für die Lectüre der Originalabhandlungen will ich hier die Vektoren und Componenten der verschiedenen Grössen, die Constanten sowie die wichtigsten Gleichungen zusammenstellen:

	Vekt.	Comp.
Elektromagn. Moment	$\mathfrak{A}$	F, G, H
Magnetische Induktion	$\mathfrak{B}$	a, b, c
Totaler elektr. Strom	$\mathfrak{C}$	u, v, w
Dielektr. Polarisation	$\mathfrak{D}$	f, g, h
Elektromotor. Kraft	$\mathfrak{E}$	P, Q, R
Magnetische Kraft	$\mathfrak{H}$	α, β, γ
Galv. geleitet. Strom	$\mathfrak{K}$	p, q, r

Dielektrisirungszahl (Dielektricitätsconstante) k.
Magnetisirungszahl μ.
Specifisches Leitungsvermögen C.
Elektrost. Potentialfunktion ψ.
Magnet. Potentialfunktion φ.
Magnetismusmenge m.
Elektrische Volumdichte ε.
Elektrische Flächendichte η.

Recapitulation der Gleichungen.

Folgendes sind ferner die wichtigsten Gleichungen:

1. Fundamentalgleichungen zwischen den Grössen, welche die Beschaffenheit des Feldes definiren:

A. 40)
$$\begin{cases} a = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z} \\ b = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} \\ c = \frac{\partial G}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} \end{cases}.$$

B. 53)
$$\begin{cases} 4\pi\mu u = \frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \\ 4\pi\mu v = \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \\ 4\pi\mu w = \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \end{cases}$$

B'. 54)
$$\begin{cases} 4\pi u = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{b}{\mu}\right) \\ 4\pi v = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{a}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c}{\mu}\right) \\ 4\pi w = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a}{\mu}\right) \end{cases}.$$

C. 60)
$$\begin{cases} 4\pi f = k\left(X_2 - \frac{dF}{dt}\right) \\ 4\pi g = k\left(Y_2 - \frac{dG}{dt}\right) \\ 4\pi h = k\left(Z_2 - \frac{dH}{dt}\right) \end{cases}.$$

C'. 68)
$$\begin{cases} 4\pi f = -k\frac{dF}{dt} \\ 4\pi g = -k\frac{dG}{dt} \\ 4\pi h = -k\frac{dH}{dt} \end{cases}.$$

D. 64)
$$\begin{cases} p = C\left(X_1 - \frac{dF}{dt}\right) \\ q = C\left(Y_1 - \frac{dG}{dt}\right) \\ r = C\left(Z_1 - \frac{dH}{dt}\right) \end{cases}.$$

D'. 67)
$$\begin{cases} p = -C\frac{dF}{dt} \\ q = -C\frac{dG}{dt} \\ r = -C\frac{dH}{dt} \end{cases}.$$

E. 63. $u = p + \frac{df}{dt}, \quad v = p + \frac{dg}{dt}, \quad w = r + \frac{dh}{dt}.$

2. Folgegleichungen derselben:

65) a. $$\frac{da}{dx} + \frac{db}{dy} + \frac{dc}{dz} = o,$$

66) b. $$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = o,$$

69) c. $\Theta = \frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}$, | 71) c'. $\Theta = o.$

3. Gleichungen zur Bestimmung von Hilfsbegriffen:

61) $\alpha.$ $\quad d\Pi = 2\pi d\tau(f^2 + g^2 + h^2) : k,$

31) $\beta.$ $\quad K(s) = -l' \frac{\partial J(ds)}{\partial k},$

28) $\gamma.$ $\quad L(s) = \frac{dJ(s)}{dt} + W,$

41) $\delta.$ $\quad \begin{cases} J(s) = \int J(ds) = \int (F dx + G dy + H dz) = \\ \qquad = \int J(d\varkappa) = \int (d\lambda + b d\mu + c d\nu), \end{cases}$

51) $\varepsilon.$ $\quad \begin{cases} u = Ml' \cos(l', x) \\ v = Ml' \cos(l', y) \\ w = Ml' \cos(l', z) \end{cases}$ $\quad \begin{cases} 47) \\ 48) \\ \zeta. \end{cases} \begin{cases} X = -ma = -m\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ Y = -mb = -m\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ Z = -mc = -m\frac{d\varphi}{\partial z} \end{cases}$

Coulomb's Gesetz für Magnetpole.

89. Es soll nun das Feld durch einen einzigen Solenoidpol N' von der Intensität m' erzeugt sein, welcher sich in einem homogenen Medium befindet, während der andere Pol des Solenoids unendlich entfernt ist. Dann ist überall im Felde $u = v = w = o$. Es folgt also aus den Gleichungen 53 (B), dass a, b, c die partiellen Differentialquotienten einer Funktion φ sind. Dieselbe hängt, da Wirkung gleich Gegenwirkung ist und wir daher alles in Art. 79 Gesagte auch hier anwenden dürfen, nur von dem Punkte des Raumes ab, wo sich der Solenoidpol befindet, nicht aber von der Richtung und Lage der Mittellinie des Solenoids. Denn wenn wir an den Pol N' den Südpol eines zweiten Solenoides von gleicher Intensität anlegen, so ist die Summe der φ für beide Solenoide zusammen stets gleich Null, wie immer bei unveränderter Lage des zweiten Solenoides die Richtung und Gestalt des ersten sich ändern mag Der Werth des φ, der von dem ersten Solenoid allein herrührt, in einem Aufpunkte P ist daher für jede Gestalt und Lage desselben gleich dem ganz davon unabhängigen negativen Werthe des φ für das zweite Solenoid, woraus folgt, dass er nur Funktion der Entfernung $PN = r$ des Aufpunktes vom Solenoidpol sein kann. Denn wäre er irgendwie von der Richtung dieser Geraden abhängig, so müsste er sich ändern, wenn r

seine Lage gegen das (erste) Solenoid änderte und müsste sich daher auch umgekehrt in derselben Weise ändern, wenn die gleiche relative Lageänderung bei unveränderter Lage von r durch Aenderung der Lage des Solenoides eintreten würde. Letzteres widerspricht aber dem vorher Bewiesenen. Da m' der Stromintensität im Solenoide proportional ist, φ aber seiner Definition gemäss nur Glieder enthält, welche ebenfalls dieser Stromintensität proportional sind, so können wir also setzen:

$$\varphi = m' f(r).$$

Die Gleichung 65 (a des Art. 88) liefert aber sofort:

$$\frac{\partial^2 f(r)}{dx^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(r)}{\partial z^2} = o,$$

woraus bekanntlich folgt:

$$f(r) = \frac{C_1}{r} + C_2.$$

Dadurch ist das Feld vollständig definirt. Es werde nun die Wirkung des Feldes auf einen Nordpol N eines zweiten Solenoides berechnet, der nach dem Punkte P gebracht wird. Dem Sinne unserer Formeln gemäss, die immer die Wirkung eines bestimmten Feldes auf einen bestimmten Aufstrom mit Ausschluss der Wirkung des letzteren auf sich selbst geben, ist dabei der zweite Nordpol nicht mit zum Felde zu rechnen. Nach den Formeln 47 (ζ des Art. 88) wirkt dann auf den zweiten Nordpol eine Kraft von der Intensität $m m' C_1 : r^2$ in der Richtung der Verbindungslinien beider Pole.

Parallel entgegengesetzte Ströme in der Entfernung Null heben einander auf. Da muss also das C enthaltende Glied der Gleichung 11, Art. 37, negativ sein, um die übrigen wesentlich positiven aufheben zu können; daher muss auch das Moment des einen Stromes auf den anderen negativ sein, wenn für den letzteren die Richtung, in der er wirklich durchströmt wird, zu Grunde gelegt wird. Da dieses Moment bei grosser Entfernung der beiden Ströme Null ist, muss dessen Differentialquotient nach der Entfernung (letztere wachsend gedacht) positiv sein. Daher ist die Kraft, welche von aussen wirken muss, um die Entfernung ent-

gegengesetzter paralleler Ströme constant zu erhalten, negativ, d. h. sie wirkt dem Wachsthume der Entfernung entgegen oder die Ströme stossen sich ab. Da zwei unmittelbar aneinanderstossende gleichnamige Solenoidpole ebenfalls entgegengesetzte Ströme enthalten, was man am besten sieht, wenn die Mittellinien sich continuirlich fortsetzen, so müssen auch diese sich abstossen. Dass obiger Ausdruck für die Wechselwirkung zweier Solenoidpole sein Zeichen wechselt, wenn einer der Pole ein entgegengesetzter ist, sieht man sofort.

Fassen wir Stahlmagnete als Körper auf, in denen um jedes Molekül ein Elementarstrom fliesst, so ist der Beweis auch für Magnetpole geliefert. Nur der Einfluss etwaiger Veränderlichkeit der Constante μ, von welcher die magnetische Induktionswirkung abhängt, kann erst studirt werden, wenn man die Grenzbedingungen für Flächen kennt, wo zwei verschiedene Körper aneinanderstossen.

Moment eines linearen Stromes auf einen Punkt.

90. Es sei nun das Feld durch einen nahezu linearen Strom von der Gesammtintensität i und beliebiger geschlossener Mittellinie erzeugt. Dann sind bloss im Innern des stromführenden Drahtes u, v, w von Null verschieden. Im gesammten übrigen Raume sind diese Grössen gleich Null.

Um die Aufstellung besonderer Gleichungen für die Oberfläche des Leiters unnöthig zu machen, setzen wir μ innerhalb und ausserhalb desselben gleich voraus. Substituiren wir in die erste der Gleichungen 53 (B) für b und c ihre Werthe aus den Gleichungen 40 (A), so erhalten wir:

$$-4\pi\mu u = \Delta F - \frac{d\Theta}{dx},$$

wobei Δ das Symbol für

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

ist. Vermöge der Gleichung 71 (c') folgt also:

72) $$-4\pi\mu u = \Delta F.$$

Um die Gleichung 71 unbedenklich anwenden zu können müssen wir annehmen, dass die Stelle, wo sich die stromerzeugende galvanische Batterie befindet, etwas weiter entfernt ist, so dass nicht diese selbst, sondern bloss die in

der Drahtleitung circulirenden elektrischen Ströme das Feld bestimmen, oder wir müssen annehmen, dass auch die Batterie selbst den Zustand des Feldes nicht weiter modificirt, als dies durch die darin enthaltenen elektrischen Ströme bedingt ist, was keine Consequenz unserer Gleichungen ist. Ferner sei noch folgende Bemerkung beigefügt: Die Annahme, dass in der den Leiter umgebenden Luft $u = v = w = o$ ist, wird bloss erfüllt sein, wenn die Strömung im Leiter stationär ist oder sich doch nur sehr langsam mit der Zeit ändert, so dass sie während jedes Zeitmomentes als stationär betrachtet werden darf. Sonst entstehen in der umgebenden Luft dielektrische Polarisationen, deren beständige Veränderung bewirkt, dass auch in der Luft u, v, w von Null verschieden sind. Da sich aber diese dielektrischen Polarisationen wellenförmig mit der Geschwindigkeit des Lichtes ausbreiten, so kommen sie in allen Experimenten über Elektrodynamik und Induction nicht in Betracht mit Ausnahme der in der neuesten Zeit nach der Methode von Hertz angestellten.

Unter allen diesen Annahmen ist also F eine Funktion, welche im Innern des Leitungsdrahtes der Gleichung genügt:

72) $$\Delta F = -4\pi\mu u,$$

in der umgebenden Luft überall die Gleichung $\Delta F = o$ erfüllt und im Unendlichen jedenfalls verschwindet, da ja dort das Feld neutral sein muss. (Eine zu F hinzutretende reine, d. h. von x, y, z, t unabhängige Constante würde übrigens nirgends in unsere Gleichungen eingehen.)

Gleichungen Kirchhoff's für Strömung im Raum.

Wir wissen, dass, wenn $d\tau$ ein Volumelement im Innern des Leitungsdrahtes ist und die Integration über dessen ganzes Innere erstreckt wird, diese Gleichungen nicht anders erfüllt werden können, als wenn der Werth von F in irgend einem Aufpunkte P durch die Gleichung gegeben ist:

$$F = \mu \int \frac{u\,d\tau}{r},$$

wobei r die Entfernung des Aufpunktes P vom betreffenden Volumelemente $d\tau$ ist. Integriren wir dieselben Gleichungen $\Delta F = o$ und 72 nach derselben Methode für den Fall,

dass ausgedehnte Körper in beliebiger Weise räumlich von Elektricität durchströmt werden, so erhalten wir, wie man leicht sieht, die Gleichungen, welche Kirchhoff, Helmholtz etc.[1]) für die Gesetze der Induction in räumlich ausgedehnten Körpern fanden, natürlich mit den speciellen der Maxwell'schen Theorie eigenen Werthen der Constanten, welche Longitudinalschwingungen ausschliessen.

Wir wählen als Volumelement $d\tau$ wiederum einen Cylinder, dessen Axe ds parallel der Stromrichtung ist und dessen Querschnitt den Flächeninhalt dq hat. Es ist dann nach den Gleichungen 51 (ε):

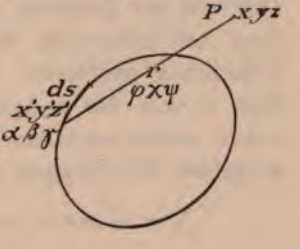
$$u = Ml' \cos(l', x),$$

daher:

$$F = \mu \int \frac{ds\, dq}{r} M l' \cos(l', x).$$

$Ml'dq$, über den ganzen Querschnitt des Leitungsdrahtes integrirt, liefert die gesammte Stromintensität i. Zählen wir ausserdem noch die positive Richtung des Elementes ds in dem Sinne, in welchem der Strom fliesst, und bezeichnen die Cosinus der Winkel, welche ds, daher auch l', mit den Coordinatenaxen bildet, mit α, β, γ, Fig. 25, so ist:

Fig. 25.



$$F = \mu i \int \frac{\alpha ds}{r}.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$G = \mu i \int \frac{\beta ds}{r}, \qquad H = \mu i \int \frac{\gamma ds}{r}.$$

Biot-Savart's Gesetz.

Hierdurch ist das Feld vollständig bestimmt und wir denken uns zunächst in den Aufpunkt P mit den Coordinaten x, y, z einen Solenoidpol von der Intensität m gebracht (Fig. 25). Dann sind die Componenten der Kraft, welche im Felde auf diesen Solenoidpol wirken, nach den Gleichungen 48 (ζ des Art. 88):

[1]) Kirchhoff, Wied. Ann. Bd. 100, S. 193 und 351, Bd. 102, S. 529, 1857; Helmholtz, Borchardt's Journal Bd. 72, S. 57, 1870.

$$X = -ma, \quad Y = -mb, \quad Z = -mc.$$

Nach den Gleichungen 40 (A) ist:

$$\left\{\begin{aligned} a &= \frac{\partial H}{dy} - \frac{\partial G}{\partial z} = \mu i \int \frac{ds}{r^3} [\beta(z-z') - \gamma(y-y')] \\ &= \mu i \int \frac{ds}{r^3} (\beta\psi - \gamma\chi), \end{aligned}\right.$$

wobei x', y', z' die Coordinaten des Elementes ds' und φ, χ, ψ die Cosinus der Winkel sind, welche die positive (von ds gegen P gezogene) Richtung von r mit den positiven Coordinatenaxen bildet.

Nun ist nach bekannten Regeln der analytischen Geometrie:

$$\Omega = \sqrt{(\gamma\chi - \beta\psi)^2 + (\alpha\psi - \gamma\varphi)^2 + (\beta\varphi - \alpha\chi)^2} = \sin(ds, r)$$
$$\beta\psi - \gamma\chi = \Omega \cos(n, x).$$

Hier bedeutet n die Richtung, welche auf ds und r senkrecht steht und deren Sinn, da Ω also auch $\sin(ds, r)$ immer positiv betrachtet wird, so zu nehmen ist, dass die Drehung der positiven ds-Richtung in die positive r-Richtung auf kürzestem Wege weinwendig gegen die positive n-Richtung geschieht. Man überzeugt sich hiervon, wenn man ds mit der x-Axe, r mit der y-Axe und n mit der z-Axe zusammenfallen lässt. Mit Hilfe der zuletzt entwickelten Gleichungen ergiebt sich:

$$X = -ma = -m\mu i \int \frac{ds}{r^3} \sin(ds, r) \cos(n, x)$$

Analoge Formeln gelten für Y und Z. Da dies die Kräfte sind, welche von aussen wirken müssen, um den Solenoidpol in Ruhe zu erhalten, so ist die Kraft, welche der Strom auf den Solenoidpol auszuüben scheint, gerade so gross, als ob jedes Element des Stromes auf denselben die Kraft

$$\frac{\mu m i\, ds \sin(ds, r)}{r^2}$$

in der Richtung n ausüben würde. Bezüglich der Uebertragung auf Magnetpole gilt wieder das am Ende des vorigen Abschnittes über das Coulomb'sche Gesetz Gesagte.

Neumann's Gesetz für die Induktion.

91. Wir betrachten genau dasselbe Feld, wie im vorigen Abschnitte. Der Aufstrom soll aber jetzt ein zweiter,

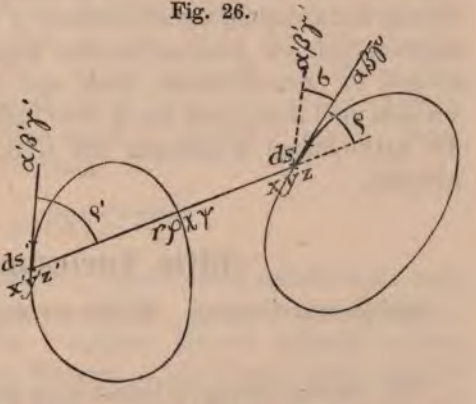
nahezu linearer Stromkreis von beliebiger geschlossener Mittellinie sein. Es empfiehlt sich jetzt, die Intensität in dem ersten Strome, welcher das Feld erzeugt, mit i', ein Element desselben mit ds' und dessen Richtungscosinus mit α', β', γ' zu bezeichnen, so dass in einem Aufpunkte P mit den Coordinaten x, y, z die Componenten des Momentenvektors die Werthe haben:

$$F = \mu i' \int \frac{\alpha' ds'}{r}, \qquad G = \mu i' \int \frac{\beta' ds'}{r}, \qquad H = \mu i' \int \frac{\gamma' ds'}{r},$$

wobei natürlich r wieder die Entfernung des Elementes ds' vom Aufpunkte P bezeichnet. Der Sinn aller Grössen ist der früher definirte; x', y', z' sollen die Coordinaten des Elementes ds' sein.

Dagegen soll i die Intensität im Aufstrome und ds soll das Element desselben sein, das sich im Aufpunkte P befindet. Die Coordinaten dieses Elementes sollen mit x, y, z, seine Richtungscosinus mit α, β, γ, seine Projectionen auf die drei Coordinatenaxen mit dx, dy, dx bezeichnet werden (Fig. 26). Das Moment des Elementes ds setzt sich nach Formel 41 (δ Art. 88) aus den Momenten der Projectionen zusammen und ist daher:

Fig. 26.



$$J(ds) = Fdx + Gdy + Hdz = ds(F\alpha + G\beta + C\gamma),$$

das Moment des ganzen Aufstromes aber ist:

$$J(s) = \int ds(F\alpha + G\beta + H\gamma).$$

Substituirt man für F, G, H die obigen Werthe und bezeichnet den Cosinus des Winkels der beiden Stromelemente ds und ds' mit

$$\sigma = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma',$$

so wird also:

73) $$J(s) = \mu i' \int\int \frac{\sigma ds ds'}{r} .$$

Nach Gleichung 28 (γ Art. 88) ist somit die im Aufstrome inducirte elektromotorische Kraft gleich

74) $$\mu \frac{d}{dt} i' \int\int \frac{\sigma\, ds\, ds'}{r} ,$$

was mit den bekannten Gesetzen der Induktion übereinstimmt. Wir haben also die Abhängigkeit des wechselseitigen Induktionscoëfficienten von den Dimensionen der beiden Stromleiter gefunden, denn wir sind jetzt wieder zu dem in der vierten und fünften Vorlesung behandelten Falle der Wechselwirkung zweier geschlossener Ströme zurückgekehrt und sahen schon in der siebenten Vorlesung (Schluss des Art. 64), dass unsere jetzigen Grössen $J(s)$, i, i' genau dasselbe sind, was dort mit Cl'_2, l'_1, l'_2 bezeichnet wurde. Da ferner die beiden Selbstinduktionscoëfficienten A und B nach der bekannten Methode gefunden werden können, dass man unter ds und ds' zwei Elemente eines und desselben Stromleiters versteht und dann noch durch zwei dividirt, so ist hierdurch die nothwendige Ergänzung der Gleichungen 16, Art. 48, geliefert.

Elfte Vorlesung.

Ampère's Gesetz. Elektrische Schwingungen.

Arbeit bei Deformation eines linearen Stroms.

92. Die Gleichung 73 liefert auch die ponderomotorischen Kräfte, welche der das Feld bestimmende Strom auf den Aufstrom ausübt. Wir haben nämlich nach der Gleichung 31 (β in Art. 88) für die ponderomotorische Kraft, welche auf irgend einen Parameter k durch das Feld (nicht die Wirkung des Aufstroms auf sich selbst) ausgeübt wird:

$$K(s) = - l' \frac{\partial J(s)}{\partial k} .$$

Die gesammte Arbeit aber, welche geleistet wird, wenn jeder Parameter eine Variation δk erfährt, ist nach Gleichung 32 Art. 69:

$$\sum K(s)\delta k = -\,l'\sum \frac{\partial J(s)}{\partial k}\delta k = -\,l'\,\delta J(s).$$

Es ist nicht nothwendig, den Querschnitt des Aufstroms nochmals in einzelne Querschnittselemente zu zerlegen; wir betrachten daher den Querschnitt als Ganzes und l' ist die gesammte Stromintensität i. Wir könnten den Aufstrom parallel zu sich selbst in der Richtung der drei Coordinatenaxen um δx, resp. δy und δz verschieben. Würde dabei $J(s)$ um $\delta_x J$, $\delta_y J$, $\delta_z J$ wachsen, so wären die Quotienten: $\delta_x J : \delta x$, $\delta_y J : \delta y$, $\delta_z J : \delta z$ die drei Kräfte, welche auf den Aufstrom als Ganzes in den drei Coordinatenrichtungen wirkten. Allein damit wären nicht die Drehmomente, welche er erfährt, ebensowenig die Kräfte, welche sich seiner Gestaltveränderung entgegensetzen, gefunden.

Um das Problem daher allgemein zu lösen, müssen wir jedem Elemente ds des Aufstroms drei von einander unabhängige Verschiebungen δx, δy, δz in den drei Coordinatenrichtungen ertheilen, wobei wir bloss, um Gleitstellen zu vermeiden, die Gesammtlänge $s = \int ds$ als unveränderlich betrachten. Wir können dann ds unvariirt lassen. Dann ist also die gesammte Arbeit:

$$75) \qquad -\,\mu\, ii'\delta \iint \frac{\sigma\, ds\, ds'}{r}.$$

Der andere Stromkreis s' bleibt dabei selbstverständlich ganz unverändert. Nehmen wir an, die gesammte Wirkung, welche der Stromkreis s erfährt, könnte dadurch ersetzt werden, dass auf jedes Element ds eine Kraft wirkte, welche nach den drei Coordinatenaxen die Componenten dX, dY, dZ hat, so müsste diese Arbeit gleich:

$$76) \qquad \int (dX\,\delta x + dY\,\delta y + dZ\,\delta z)$$

sein. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert mit Rücksicht darauf, dass alle δx, δy, δz unabhängig sind, die Kräfte dX, dY, dZ. *Ableitung des Ampère'schen Gesetzes.*

Bezeichnen wir das Doppelintegral im Ausdruck 75 mit D, so ist:

$$77) \qquad \delta D = \iint ds\, ds' \frac{-\,\sigma\delta r}{r^2} + \iint ds\, ds' \frac{\delta\sigma}{r}.$$

Drückt man r durch x, y, z, x', y', z' aus, so wird das erste Glied gleich einer Summe dreier Glieder $E_1 + E_2 + E_3$, wobei:

$$E_1 = \iint ds\, ds' \frac{-(x-x')}{r^3} \sigma \delta x$$

und E_2 und E_3 hieraus durch cyklische Vertauschung von x, y, z gefunden werden. Ferner findet man leicht:

$$\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \alpha' = \frac{dx'}{ds'}, \qquad \varphi = \frac{x-x'}{r} = \frac{dr}{dx} = -\frac{dr}{dx'},$$

$$\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \beta' = \frac{dy'}{ds'}, \qquad \chi = \frac{y-y'}{r} = \frac{dr}{dy} = -\frac{dr}{dy'},$$

$$\gamma = \frac{dz}{ds}, \qquad \gamma' = \frac{dz'}{ds'}, \qquad \psi = \frac{z-z'}{r} = \frac{dr}{dz} = -\frac{dr}{dz'},$$

$$\sigma = \frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'},$$

wobei α, β, γ; α', β', γ'; φ, χ, ψ die Richtungscosinus von ds, ds', r sind (s. Fig. 26 Art. 91). Es ist wohl zu beachten, dass man bei Differentiation nach s' nur auf der Curve s' fortschreitet, daher x, y, z constant bleiben; bei der nach s und bei der durch δ angezeigten Variation dagegen bleibt x', y', z' unverändert. Hiernach ist auch das letzte Glied der Gleichung 77 eine Summe $F_1 + F_2 + F_3$, wobei wieder F_2 und F_3 durch cyklische Vertauschung aus F_1 entstehen und:

$$F_1 = \iint \frac{ds\, ds'}{r} \frac{dx'}{ds'} \delta \frac{dx}{ds} = \iint \frac{ds\, ds'}{r^2} \frac{dx'}{ds'} \frac{dr}{ds} \delta x$$

ist, wie die partielle Integration nach s lehrt, da ja bei einer geschlossenen Curve die Ausdrücke für beide Integrationsgrenzen sich aufheben.

Das letzte Integral findet man leicht folgendermaassen. Es ist identisch:

$$\frac{d}{ds'}\left(\frac{x-x'}{r^2}\frac{dr}{ds}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dx'}{ds'}\frac{dr}{ds} - 2\frac{x-x'}{r^3}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + \frac{x-x'}{r^2}\frac{d^2r}{ds\, ds'}$$

und da die linke Seite über eine geschlossene Curve integrirt verschwindet, folgt:

$$78) \quad \int \frac{ds'}{r^2}\frac{dx'}{ds'}\frac{dr}{ds} = \int ds' \left(-2\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + r\frac{d^2r}{ds\, ds'}\right)\frac{x-x'}{r^3}.$$

Nun ist wegen $r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$:

$$r\frac{dr}{ds} = (x-x')\frac{dx}{ds} + (y-y')\frac{dy}{ds} + (z-z')\frac{dx}{ds} = r\varrho,$$

wobei ϱ der Cosinus des Winkels zwischen ds und der von ds' gegen ds gezogenen r-Richtung ist. Differentiirt man nochmal, indem man auf der Curve s' um ds' fortschreitet, so wird:

$$r\frac{d^2r}{ds\,ds'} + \frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} = -\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} - \frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} = -\sigma.$$

Die rechte Seite der Gleichung 78 geht daher über in:

$$\int ds'\left(-\sigma - 3\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right)\frac{x-x'}{r^3},$$

und da man, wenn ϱ' der Cosinus des Winkels zwischen ds und der von ds' nach ds gezogenen r-Richtung ist, analog mit dem für ϱ gefundenen Werthe hat $dr : ds' = -\varrho'$, so liefert die Gleichung 78:

$$\int\frac{ds'}{r^2}\frac{dx'}{ds'}\frac{dr}{ds} = \int ds'(3\varrho\varrho' - \sigma)\frac{x-x'}{r^3}.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $ds\,\delta x$, integrirt nach s, so erhält man F_1; addirt man noch E_1 dazu, so folgt unter Berücksichtigung der für E_1 und F_1 gefundenen Werthe:

$$E_1 + F_1 = \iint ds\,ds'(3\varrho\varrho' - 2\sigma)\frac{x-x'}{r^3}\delta x.$$

Der Gesammtwerth von δD entsteht, wenn man hierzu noch $E_2 + F_2$ und $E_3 + F_3$ addirt, welche hieraus durch cyklische Vertauschung von x, y, z entstehen und daher bloss δy und δz enthalten. Setzt man die Summe dieser Ausdrücke in 75 ein und das Resultat dem Ausdrucke 76 gleich, und vergleicht bloss die δx enthaltenden Glieder, so folgt also:

$$dX = \mu ii'\,ds\int ds'(2\sigma - 3\varrho\varrho')\frac{x-x'}{r^3}$$

$$= \mu ii'\,ds\int\frac{ds'}{r^2}(2\sigma - 3\varrho\varrho')\cos(r, x).$$

Ganz analoge Ausdrücke ergeben sich für dY und dZ. Dies sind dem Sinne unserer Gleichungen nach die Kräfte, welche von aussen wirken müssen, um den Aufstrom in Ruhe

zu erhalten. Alle ins Spiel kommenden Kräfte werden also erklärt, wenn man annimmt, dass je zwei Stromelemente ds und ds' in der Richtung ihrer Verbindungslinie eine scheinbare Anziehung von der Stärke:

$$79) \qquad \mu i i' \frac{ds\, ds'}{r^2}(2\sigma - 3\varrho\varrho')$$

auf einander ausüben, worin man das allbekannte Ampère'sche Gesetz wieder erkennt.

Vorzüge der Maxwell'schen Theorie.

Dazu kommt noch, dass unsere Gleichungen auch, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, die Gesetze der Stromverzweigung und stationären Strömung in Flächen und Körpern und wie wir in der nächsten Vorlesung sehen werden, dazu noch die gesammte Elektrostatik ohne neue Hypothesen liefern. Vergleicht man daher unsere Methode mit der Ampère's und seiner Nachfolger, so muss man gestehen, dass Maxwell aus minder zahlreichen und natürlicheren Hypothesen eine grössere Fülle von Resultaten gewinnt, dass also auch schon von diesem Gesichtspunkte allein die Maxwell'sche Theorie der alten vorzuziehen wäre. Aber sie hat noch grössere Vorzüge. Erstens haben ihre Gleichungen eine weit einfachere und naturgemässere Form. Links steht daselbst immer der Differentialquotient einer Grösse nach der Zeit, rechts Funktionen der augenblicklichen Werthe der Grössen. Sie geben uns also ein klares Bild, wie durch die augenblicklichen Werthe die Veränderungen jeder Grösse bestimmt sind, während die alten Gleichungen vollkommen ungeordnet und daher auch viel unbequemer für die Berechnung aller Probleme sind, ausser derjenigen, für welche sie speciell zugeschnitten wurden.

Zweitens sahen wir aber, dass die alten Gleichungen nur für stationäre oder wenigstens nahe stationäre Elektricitätsströmung gelten. Bei sehr raschem Wechsel der Stromintensität gelten ganz andere Gesetze, zu denen wir in Art. 94 übergehen werden. Um hier nur ein Beispiel zu erwähnen, würde ein momentan in einem Draht oder Drahtelemente entstandener Strom auf einen zweiten so lange gar nicht wirken, bis nicht die mit der Lichtgeschwindigkeit von ihm ausgehenden elektrischen Wellen den zweiten Strom

erreicht haben und auch dann würde die Wirkung in den ersten Momenten noch viel complicirteren Gesetzen folgen, bis der Zustand stationär geworden ist, wo dann erst das Ampère'sche Gesetz gilt.[1])

μ im Standard-Medium.

93. Wir kommen nun wieder auf die Betrachtungen des Artikels 42 zurück. Wir definirten dort die (magnetisch) gemessene Stromintensität eins als diejenige, welche einen unendlichen geraden Draht durchfliessend auf die Längeneinheit eines zweiten vollkommen gleichen, gleichdurchströmten, parallelen, in der Distanz eins befindlichen Draht die Kraft 2 ausübt. Wir fanden dies, indem wir die Anziehung zweier Stromelemente gleich:

$$\frac{ii'ds\,ds'}{r^2}(2\sigma - 3\varrho\varrho')$$

setzten. Wir können auch umgekehrt schliessen, dass das Ampère'sche Gesetz, wenn wir im betreffenden Medium die Stromstärke so definiren, diese Form haben, also:

79) $$\mu = 1$$

sein muss.

Allgemeine Gleichungen für elektrische Schwingungen.

94. Wir gehen nun zur Betrachtung derjenigen Gruppe von Erscheinungen über, welche den Gegensatz zu den bisher betrachteten bilden, nämlich zu dem Verlaufe der mit der Lichtgeschwindigkeit sich ausbreitenden elektrischen Gleichgewichtsstörungen, welche ebenso gut in Nichtleitern, wie in Leitern, ja in ersteren weit ausgiebiger, weil nicht gedämpft, auftreten. Um die Theorie dieser neuen Gruppe specieller Fälle aus unseren allgemeinen Gleichungen herzuleiten, verfahren wir wie folgt.

Wir schliessen wieder die Betrachtung derjenigen Stellen, wo gerade elektromotorische Kräfte thätig sind, aus. Wir haben dann im homogenen Medium die Gleichungen 54, 68, 67 und 71 (*B*, *C'*, *D'* und *c'* in Art. 88) anzuwenden.

Die Substitution der Werthe 40 (*A*) in die erste der Gleichungen 53 (*B*) liefert uns unter Berücksichtigung der Glei-

[1]) Ueber einen etwas versteckteren Vorzug der Maxwell'schen Theorie vergl. Hertz, Wied. Ann. Bd. 23, S. 84, 1884.

chung 69 und 71 (c und c') genau wie in der vorigen Vorlesung Art. 90 die schon dort gefundene Gleichung:

72) $$4\pi\mu u = -\Delta F.$$

Nach den Gleichungen 63, 68 und 69 (E, C', D') aber ist, wie wir schon in Art. 87 unmittelbar nach Ableitung der Gleichung 68 fanden:

63a) $$u = p + \frac{df}{dt} = -C\frac{dF}{dt} - \frac{k}{4\pi}\frac{d^2F}{dt^2}.$$

Dies in Gleichung 72 substituirt liefert uns zunächst die Gleichung für die Wellen der Grösse F:

80) $$\mu k\frac{d^2F}{dt^2} + 4\pi\mu C\frac{dF}{dt} = \frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2}.$$

Es ist bequem f einzuführen, indem man mit k multiplicirt, dann nochmals nach t differentiirt und für $kdF:dt$ seinen Werth aus den Gleichungen 68 (C') substituirt. Dies liefert:

81) $$\mu k\frac{d^2f}{dt^2} + 4\pi\mu C\frac{df}{dt} = \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2}.$$

Dieselbe Gleichung nur p oder u für f substituirt (wir wollen sie die Gleichungen 82 und 83 nennen und behufs Raumersparniss gar nicht anschreiben), erhält man übrigens aus 80, die erste wenn man mit C multiplicirt, nach t differentiirt und die Gleichungen 67 (D') beachtet, die zweite allgemeinste folgendermaassen: A) man multiplicirt die Gleichung 80 mit C und differentiirt einmal nach t, B) man multiplicirt dieselbe Gleichung mit $k:4\pi$ und differentiirt zweimal nach t, C) man addirt beide Resultate, D) man berücksichtigt die Gleichung 68, 67, 63 (C', D', E'). Dass jede dieser Gleichungen ihr Analogon für die y- und z-Axe hat, bedarf kaum der Erwähnung.

Für u, v, w und F, G, H hatten wir die Gleichungen:

66 (b) $$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

71 (c') $$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = 0.$$

Die beiden analogen Gleichungen für f, g, h und p, q, r finden wir, wenn wir die letzte Gleichung nach t differentiiren und einmal mit k, das andere Mal mit C multi-

pliciren; das erste Mal haben wir dann noch die Werthe 68 (C'), das zweite Mal die 67 (D') zu substituiren und erhalten:

$$84) \qquad \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz} = 0.$$

$$85) \qquad \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz} = 0.$$

Dass die Gleichungen 80, 81, 82 und 83 den allgemeinsten Fall einer Wellenbewegung mit Dispersion (verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeit für verschiedene Schwingungsdauer) und Absorption (Abnahme der Amplitude während der Fortpflanzung) darstellen, ist bekannt.

Die elektrischen Wellen sind transversal.

Die Gleichungen 66, 71, 84 und 85 zeigen, dass die Wellenbewegung transversal ist. In der That, betrachten wir zuerst Planwellen, die in der Richtung der x-Axe fortschreiten, setzen wir also voraus, dass sämmtliche Grössen nur Funktionen von x und t sind, so liefern die Gleichungen 66, 71, 84 und 85:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial H}{\partial x} = 0.$$

Andere Coordinaten, als die x-Coordinaten sollen aber in diesen Ausdrücken überhaupt nicht enthalten sein. Berücksichtigt man dies bei Betrachtung der Gleichungen 80 bis 83, so findet man aus diesen Gleichungen, wie wir es in Artikel 87 für Θ bewiesen, dass überhaupt $h = w = r = H = 0$ sein muss. Weder Strömung noch dielektrische Polarisation noch elektrische Kraft können also eine Componente in der Fortpflanzungsrichtung der Wellen haben. Sind die Wellen nicht plan, so können sie doch in einem sehr kleinen Bezirk im Allgemeinen immer als plan betrachtet werden; sie werden also wieder, etwaige singuläre Stellen ausgenommen, in jedem kleinen Bezirke transversal sein.

Lineare, circulare, elliptische Polarisation.

Die Componenten in den beiden auf der Fortpflanzungsrichtung senkrechten Richtungen sind aber vollkommen unabhängig von einander. Was wir uns immer unter f, g, h, p... vorstellen mögen, jedenfalls können wir senkrecht zum Strahle Linien aufgetragen denken, deren Längen in jedem

Augenblicke die Werthe dieser Grössen darstellen. Die Endpunkte dieser Linien werden dann ganz die Bewegungen machen, die wir den Aethertheilchen in linear polarisirten Lichtstrahlen zuschreiben. Die Endpunkte der Linien aber, welche bei elektrischen Wellen, die in der z-Richtung fortschreiten, Grösse und Richtung der Gesammtpolarisation $\sqrt{f^2+g^2}$ oder der Gesammtströmung $\sqrt{u^2+v^2}$ etc. darstellen, werden sich ganz so bewegen, wie Aethertheilchen im elliptisch oder circularpolarisirten Lichte.

Wellen in Isolatoren.

95. Betrachten wir zunächst vollkommene Isolatoren; dieselben werden am bequemsten durch die dielektrischen Polarisationen f, g, h charakterisirt. Da für dieselben $C=0$, so erhalten wir:

$$86) \qquad k\mu\frac{d^2f}{dt^2}=\Delta f, \qquad k\mu\frac{d^2g}{dt^2}=\Delta g, \qquad k\mu\frac{d^2h}{dt^2}=\Delta h.$$

Es sind dies genau, nur in anderer Weise begründet, die Gleichungen, von denen man in der alten Optik ausgeht. Die Theorie aller optischen Phänomene, die Dioptrik (vergl. Kirchhoff's Vorlesungen über Optik), das Huygens'sche Princip, die Interferenz-, Beugungs- und Polarisationserscheinungen könnten also hier gerade so angeschlossen werden, wie man sie in jedem Lehrbuche der Optik findet. Wir wollen nur ein paar Bemerkungen über Planwellen machen, die in der z-Richtung fortschreiten.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Für diese folgt aus den Gleichungen 86), dass f und g von einander unabhängige Funktionen von $t\pm z\sqrt{\mu k}$ sind. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist also für alle Schwingungsdauern dieselbe und hat den Werth:

$$87) \qquad V=1:\sqrt{\mu k}.$$

Richtung der magnetischen Schwingungen.

Aus den Gleichungen 68 (C') folgt:

$$F=-\frac{4\pi}{k}\int f\,dt$$

und aus den Gleichungen 40 (A):

$$b=-\frac{4\pi}{k}\frac{\partial}{\partial z}\int f\,dt.$$

Analoge Werthe haben natürlich G und a. Wenn also:

$$f = A \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right),$$

$g = 0$ ist, so wird:

$$F = \frac{2A\tau}{k} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad G = 0,$$

$$b = \frac{4\pi A}{Vk} \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad a = 0.$$

Die Schwingungen des Momentenvektors erfolgen also in derselben Ebene wie die der dielektrischen Polarisation mit um $\tau : 4$ verschobener Phase, die Schwingungen des Induktionsvektors mit gleicher Phase in derjenigen durch den Strahl gezogenen Ebene, welche senkrecht auf der Schwingungsebene der früheren Grössen steht.[1])

Wellen in Halbleitern.

96. Wir wollen nun in der Richtung der x-Axe fortschreitende Planwellen in Halbleitern, oder besser in leitenden Dielektricis behandeln. Zur Charakteristik derselben bestimmen wir wieder f, g h, wofür jetzt die allgemeinen Gleichungen 81 gelten. Die Methode, wie selbe gelöst werden, ist bekannt. Man bestimmt ein partikuläres Integral, indem man setzt:

$$f = Ae^{\frac{2\pi}{\tau} ti + (\xi + \eta i)x},$$

worin A, τ, ξ, η Constante, $i = \sqrt{-1}$ ist. Die Substitution liefert ohne Weiteres, wenn man mit $V_0 = 1 : \sqrt{k\mu}$ die Geschwindigkeit der Wellen in einem Medium bezeichnet, für welches k und μ dieselben Werthe hätten, aber $C = 0$ wäre:

$$\xi^2 = -\frac{2\pi^2}{\tau^2 V_0^2} + \sqrt{\frac{4\pi^4}{\tau^4 V_0^4} + \frac{16\pi^4 C^2\mu^2}{\tau^2}},$$

$$\eta^2 = \frac{2\pi^2}{\tau^2 V_0^2} + \sqrt{\frac{4\pi^4}{\tau^4 V_0^4} + \frac{16\pi^4 C^2\mu^2}{\tau^2}}.$$

Ein reelles partikuläres Integrale ist der reelle Theil der Exponentielle, welcher liefert:

$$f = Ae^{\xi x} \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} + \eta x\right).$$

---

[1]) Maxwell, treat. on el. vol. II. art. 790. Schaik, Arch. nerl. t. 21, p. 406, 1886.

Es ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$88) \qquad \frac{2\pi}{\eta\tau} = 1 : \sqrt{\frac{1}{2V_0^2} + \sqrt{\frac{1}{4V_0^4} + C^2\mu^2\tau^2}} = V.$$

Für kleine Werthe von C würde dies liefern:

$$V_0 - \frac{V_0^5 C^2 \mu^2 \tau^2}{2}.$$

Dispersion. Es ist also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit abhängig von der Wellenlänge oder Schwingungsdauer; wir haben Dispersion.

Absorption. Da nur der negative Werth von ξ physikalisch denkbaren Grenzbedingungen genügen kann, sinkt die Amplitude in einer Schicht von der Dicke eins auf das $e^{-\xi}$fache, in einer Schicht von der Dicke einer Wellenlänge um das $e^{-\xi V\tau}$fache. Für kleine C ist:

$$\xi = 2\pi C\mu V_0, \qquad \xi V\tau = 2\pi C\mu V_0^2 \tau.$$

Wir haben also Absorption.

Auswählende Absorption. Freilich ist das hier gefundene Gesetz der Abhängigkeit der Dispersion nicht in Uebereinstimmung mit der Erfahrung. Es kann dies auch nicht anders sein, da, wie die Absorptionsspectra beweisen, hier nicht eine gleichmässige schwache Leitungsfähigkeit der ganzen Substanz, sondern eine Einlagerung kleiner leitender Körperchen in einen Isolator, welchem ganz bestimmte Eigenschwingungen zukommen, wirksam sein muss. Da unsere Gleichungen den Schwingungsgleichungen elastischer Körper ganz analog sind, so lässt sich darauf auch eine ganz analoge Absorptions- und Dispersionstheorie, wie in der alten Optik, aufbauen (s. Literaturübersicht); doch will ich hier darauf nicht eingehen und begnüge mich nachgewiesen zu haben, dass die Theorie schon auf unserem Standpunkte wenigstens qualitativ den Zusammenhang zwischen Absorption und Dispersion wiedergiebt.

Dielektrische Nachwirkung. Ich bemerke noch, dass Maxwell eine ganz andere Erscheinung, die er auch elektrische Absorption nennt und die ich einmal dielektrische Nachwirkung genannt habe, ebenfalls aus der Annahme erklärt, dass in Isolatoren besser leitende Partikelchen eingelagert seien. Auch auf diese in-

teressante Theorie, welche Lodge durch ein sinnreiches Modell erläutert[1]), kann ich hier nicht näher eingehen.

Wellen in Leitern.

Für nicht dielektrisch polarisirbare Leiter, wenn es solche überhaupt giebt, wäre $k = f = g = h = 0$. Wir könnten also die Gleichung 81 nicht verwenden. Da aber die Gleichungen 82 und 83 ganz dieselbe Form haben, so bleibt also auch die Integrationsmethode dieselbe; es wird in den vorhergehenden Formeln $k = 0$, $V_0 = \infty$; p aber tritt an Stelle von f. Die Gleichungen stimmen dann vollständig mit denen überein, welche Fourier für die Wärmeleitung fand; die Elektricität bewegt sich daher in Leitern nach denselben Gesetzen wie die geleitete Wärme.[2]) Die Formel 88 liefert für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit den Werth:

$$V = 1 : \sqrt{C\mu\tau}.$$

Die Amplitude reducirt sich bei Durchwanderung der Längeneinheit auf den $e^{-2\pi\sqrt{C\mu:\tau}}$ fachen Werth; also, da die Wellenlänge $\lambda = V\tau = \sqrt{\tau : C\mu}$ ist, bei Durchwanderung einer ganzen Welle auf den $e^{-2\pi:\lambda}$ fachen Werth. Obwohl hier natürlich λ die Wellenlänge im betreffenden Medium ist, die von der in der Luft total verschieden sein kann, so sieht man doch, dass schon in sehr dünnen Schichten die Wellenbewegung vollkommen erlischt. Während also die stationäre Strömung sich wesentlich auf das Innere der Leiter beschränkt, ist umgekehrt diese Wellenbewegung wesentlich auf das Innere der Isolatoren beschränkt und dringt in die Leiter kaum ein. Doch scheint die Theorie der Schirmwirkung der Metalle gegen die Hertz'schen Schwingungen[3]) sowie die Anwendung auf Kundt's Bestimmung der Brechungsquotienten der Metalle noch grosse Schwierigkeiten zu haben.

---

[1]) Lodge, Phil. mag. December 1876.
[2]) Maxwell, treatise vol. II. art. 801.
[3]) Ebendort vol. II. art. 647.

Zwölfte Vorlesung.

Elektrostatik.

97. Wir kommen nun zum schönsten, aber schwierigsten Kapitel der Maxwell'schen Theorie, zur Lehre von der statischen Elektricität. Die alte Elektricitätstheorie macht sich dieselbe leicht. Sie stellt einfach die betreffenden Gesetze als Erfahrungsthatsachen an ihre Spitze. Hier aber müssen wir sie als letzte Consequenzen aus unseren Gleichungen ableiten.

Damit wir überhaupt freie Elektricität erhalten, müssen in dem Medium einmal äussere elektromotorische Kräfte gewirkt haben. Wir müssen daher zunächst auf die allgemeinen Gleichungen 60 und 64 zurückkommen. Wir finden zunächst aus den Gleichungen 60, 63 und 64 (*C, D, E*):

$$ku = kp + k\frac{df}{dt} = k\frac{df}{dt} - kC\frac{dF}{dt} + kCX_1$$

$$= k\frac{df}{dt} + 4\pi Cf + kC(X_1 - X_2).$$

hung der n Elek- icität. Bildet man zwei analoge Gleichungen für kv und kw, differenzirt die erste partiell nach x, die zweite partiell nach y, die dritte partiell nach z und addirt, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung 66 (b):

$$89) \qquad k\frac{d\varepsilon}{dt} + 4\pi C\varepsilon = \xi,$$

wobei

$$90) \qquad \varepsilon = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z},$$

und ausserdem im homogenen Felde:

$$\xi = Ck\left[\frac{\partial(X_2 - X_1)}{\partial x} + \frac{\partial(Y_2 - X_1)}{\partial y} + \frac{\partial(Z_2 - Z_1)}{\partial z}\right]$$

ist. Setzt man ferner:

91) $$\theta = \frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dy} + \frac{dr}{dz},$$

so findet man aus 63 (E):

92) $$\frac{d\varepsilon}{dt} + \theta = o \text{ [1]}$$

---

[1]) Im inhomogenen Felde ergiebt sich:

$$\xi = k\left[\frac{\partial C(X_2 - X_1)}{\partial x} + \frac{\partial C(Y_2 - X_1)}{\partial y} + \frac{\partial C(Z_2 - Z_1)}{\partial z}\right]$$

$$-4\pi k\left[f\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{C}{k}\right) + g\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{k}\right) + h\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{C}{k}\right)\right],$$

für θ und Θ erhält man in ganz ähnlicher Weise:

$$k\frac{d\theta}{dt} + 4\pi C\theta = C\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial k(X_1 - X_2)}{\partial x} + \frac{\partial k(Y_1 - Y_2)}{\partial y} + \frac{\partial k(Z_1 - Z_2}{\partial z}\right]$$

$$-C\left[\frac{dp}{dt}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{k}{C}\right) + \frac{dq}{dt}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{k}{C}\right) + \frac{dr}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k}{C}\right)\right]$$

$$k\frac{d^2\Theta}{dt^2} + 4\pi C\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left(4\pi C X_1 + k\frac{dX_2}{dt}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(4\pi C Y_1 + k\frac{dY_2}{dt}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(4\pi C Z_1 + k\frac{dZ_2}{dt}\right) - 4\pi\frac{dF}{dt}\frac{\partial C}{\partial x} - 4\pi\frac{dG}{dt}\frac{\partial C}{\partial y} - 4\pi\frac{dH}{dt}\frac{\partial C}{\partial z}$$

$$-\frac{d^2F}{dt^2}\frac{\partial k}{\partial x} - \frac{d^2G}{dt^2}\frac{\partial k}{\partial y} - \frac{d^2H}{dt^2}\frac{\partial k}{\partial z}.$$

Die Gleichung 92 resp. die daraus für die Trennungsfläche eines Leiters und Nichtleiters folgende versinnlicht Poincaré in seiner *Electricité et optique*, p. 18, indem er f, g, h als die Componenten der Verschiebung der Theilchen eines Fluidums (des *fluide inducteur*), p, q, r aber als die Geschwindigkeitscomponenten der Theilchen eines zweiten Fluidums auffasst. Die in Rede stehende Gleichung besagt dann, dass aus jedem Volumelemente von dem einen Fluidum ein gleiches Volumen ein-, als von dem anderen austritt, dass also beide Fluida für einander undurchdringlich sind. Wir können dann nach Hertz's Vorgang

$$\frac{df}{dx} + \frac{dg}{dy} + \frac{dh}{dz}$$

als die Dichte der wahren, dagegen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{k}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g}{k}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{h}{k}\right) = \varepsilon_f,$$

als die Dichte der freien Elektricität bezeichnen. Für letztere hat man:

98. Aehnlich wie wir schon für Θ in Art. 87 die Gleichung 70 fanden, folgt aus 89 für den Fall, dass keine äusseren elektromotorischen Kräfte wirken, also:

$$\xi = o$$

ist:

93) $$\varepsilon = C_1 e^{-\frac{4\pi C}{k} t}.$$

Wir können daraus einen ähnlichen Schluss, wie damals für Θ, nun auch für ε ziehen. Falls sich das Medium einmal in dem neutralen Zustande, wo nirgends weder elektrische, noch magnetische Kräfte wirkten, befunden hat und seitdem in einem Punkte desselben keine äusseren elektromotorischen Kräfte wirksam waren, muss daselbst $C_1 = \varepsilon = o$ sein. Dies gilt auch, wenn immer $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$, $Z_1 = Z_2$ war, d. h. wenn, wie die elektromotorischen Kräfte der Induktion, so auch die äusseren elektromotorischen Kräfte gleichmässig auf die dielektrische Polarisation und die galvanische Strömung gewirkt haben. Haben dagegen anders beschaffene äussere elektromotorische Kräfte gewirkt, so kann und wird im Allgemeinen ε einen von Null verschiedenen Werth haben.

Dichte der Elektricität.

Wir wollen schon jetzt, natürlich ohne dabei an irgend etwas Materielles zu denken, die Grösse ε als die Dichte der (wahren) Elektricität im betrachteten Punkte bezeichnen. Ist dann $d\tau$ ein Volumelement, welches diesen Punkt enthält, so nennen wir $\varepsilon d\tau$ die gesammte in diesem Volumelement enthaltene Elektricität.

Leiter, Isolatoren.

99. In dem Augenblicke, wo die äusseren elektromotorischen Kräfte zu wirken aufgehört haben, wird wieder die Gleichung 93 gelten, es wird also ε in geometrischer Progression und zwar um so rascher abnehmen, je grösser

---

$$k\frac{d\varepsilon_f}{dt} + 4\pi C\varepsilon_f = -\frac{4\pi}{k}\left(f\frac{\partial C}{\partial x} + g\frac{\partial C}{\partial y} + h\frac{\partial C}{\partial z}\right)$$
$$-\frac{1}{k}\left(\frac{df}{dt}\frac{\partial k}{\partial x} + \frac{dg}{dt}\frac{\partial k}{\partial y} + \frac{dh}{dt}\frac{\partial k}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial C(X_2 - X_1)}{\partial x} + \frac{\partial C(Y_2 - Y_1)}{dy} + \frac{\partial C(Z_2 - Z_1)}{\partial z}.$$

die Leitungsfähigkeit C und je kleiner die Dielekricitätsconstante k ist. Im vollkommenen, nicht dielektrisirbaren Leiter, wo $k = o$ ist, muss daher durchweg $f = g = h = o$ angenommen werden und es kann sich nach der Maxwell'schen Theorie in dessen Innern keine freie Elektricität entwickeln. Nur im vollkommenen Isolator, wo $C = o$ ist, haben wir nach dem Aufhören der äusseren elektromotorischen Kräfte $\varepsilon = C_1$, die etwa entwickelte Elektricität bleibt also in jedem Punkte unverändert; sie kann nicht entweichen. Nur unter dieser Bedingung ist also dauerndes Auftreten freier Elektricität im Innern eines Körpers möglich.

100. Obwohl wir die Gleichungen, welche an der Oberfläche, wo zwei Körper aneinander grenzen, im Allgemeinen von unseren Betrachtungen ausgeschlossen haben, so sollen hier doch die folgenden, darauf Bezug habenden Bemerkungen Platz finden. Wir denken uns solche Grenzflächen immer als continuirliche, aber äusserst dünne Uebergangsschichten und nehmen daher an, dass $f, g, h, u, v, w, p, q, r$ sammt ihren ersten Ableitungen als überall continuirlich betrachtet werden können. Wir wollen nun den Vektor der dielektrischen Polarisation mit $\mathfrak{D}$, den der totalen elektrischen Strömung mit $\mathfrak{C}$, den der galvanischen Strömung mit $\mathfrak{K}$ bezeichnen (s. Art. 88). Dies sind also vom Punkte, um dessen f, g u. s. w. es sich handelt, aus gezogene Gerade, deren Projectionen auf die drei Coordinatenaxen f, g, h, resp. u, v, w; p, q, r sind. Wir wollen weiter mit $d\tau$ das Volumelement eines beliebigen Systems S von Körpern bezeichnen, welches rings von einer in sich geschlossenen Fläche o umschlossen wird. do sei ein Element derselben, n die an dasselbe nach aussen gezogene Normale.

Unzerstörbarkeit der elektrischen Quantität.

Wir berechnen nun nach dem Vorgange Hertz's das Integrale

$$\frac{d}{dt}\int \varepsilon\, d\tau = -\int \theta\, d\tau,$$

wobei die Integration über den ganzen Raum zu erstrecken ist, der von der Fläche o umschlossen wird. Substituiren wir für ε und θ die Werthe 90 und 91, integriren die nach

x differenzirten Ausdrücke partiell nach x und verfahren ebenso mit y und z, so erhalten wir in bekannter Weise:[1])

$$\frac{d}{dt}\int \varepsilon\, d\tau = -\int \theta\, d\tau = -\frac{d}{dt}\int do\, \mathfrak{D}\cos(\mathfrak{D}, n)$$

$$= \int do\, \mathfrak{K}\cos(\mathfrak{K}, n).$$

101. Sei zunächst das System S rings vom freien Aether umgeben, der sich in sehr grosser Entfernung im neutralen Zustande befindet, so kann die Fläche o so construirt werden, dass jedes Element derselben in Aether von neutralem Zustande liegt. Dann werden $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{K}$ in jedem Elemente do den Werth Null haben. Es ist folglich:

$$\frac{d}{dt}\int \varepsilon\, d\tau = o.$$

Die gesammte, im System enthaltene Elektricität kann sich also nicht ändern. Wird durch äussere elektromotorische Kräfte in einem Punkte Elektricität erzeugt, so muss immer dafür an einer anderen Stelle ein gleiches Quantum der entgegengesetzten Elektricität auftreten und man bemerke wohl, dass alles dies, sowie auch alles noch folgende nicht etwa Postulate sind, die wir der Erfahrung entnehmen, sondern lediglich Consequenzen unserer Gleichungen, die sich in der Erfahrung bestätigen.

Ansammlung der Elektricität an der Oberfläche eines Leiters.

102. Sei nun das früher betrachtete System S ein System von leitenden Körpern, die rings von beliebigen, im Endlichen liegenden Isolatoren umgeben sind, in denen die Fläche o verläuft. Dann ist ebenfalls in jedem Flächenelemente derselben $p = q = r = \theta = \mathfrak{K} = o$, und man gelangt wieder zu dem Resultate, dass die gesammte Menge der Elektricität in dem Körpersysteme unveränderlich bleiben muss.

Haben die äusseren elektromotorischen Kräfte zu wirken aufgehört, so gilt dann im Innern eines jeden mit Leitungsfähigkeit begabten Körpers die Gleichung 93; die da-

---

[1]) Vergl. Kirchhoff's Vorlesungen über Mechanik, 3. Aufl. S. 112.

selbst ursprünglich etwa vorhandene Elektricität nimmt also je nach der Leitungsfähigkeit rascher oder langsamer ab. Endlich tritt Gleichgewicht ein; dann kann dieselbe nur mehr in vollkommenen Isolatoren und an der Oberfläche der leitenden Körper angehäuft sein, wo wir das Vorhandensein ganz dünner Schichten annehmen, in denen die Grössen k, C und μ variabel sind, weshalb die Gleichung 93 nicht gilt.

Wir wollen diese Schichten als die geladenen Oberflächen bezeichnen. Die Gesetze, nach denen sich die Elektricität im Zustande des Gleichgewichts daselbst ausbreitet, und die ponderomotorischen Kräfte, welche bei Elektricitätsansammlung in Isolatoren und auf der Oberfläche von Leitern auftreten, bilden das Object der Elektrostatik; denselben sollen im Folgenden noch einige Betrachtungen gewidmet werden.

103. In dem Gleichgewichtszustande, welchen wir jetzt betrachten, haben alle elektrischen Ströme aufgehört. Es ist also:

$$u = v = w = p = q = r = \frac{df}{dt} = \frac{dg}{dt} = \frac{dh}{dt} = o.$$

Es ist alles stationär geworden. Wenn man folglich zu verschiedenen Zeiten für einen Augenblick einen immer gleich beschaffenen Solenoidpol in das Feld hineinbringt, so können auf denselben nicht zu einer bestimmten Zeit andere Kräfte, als zu irgend einer anderen Zeit wirken, falls solche Kräfte überhaupt vorhanden sind. Da dieselben aber den Grössen a, b, c proportional sind, so können diese Grössen jedenfalls nicht Funktionen der Zeit t sein. Es muss also sein:

$$\frac{da}{dt} = \frac{db}{dt} = \frac{dc}{dt} = o\,,$$

und die Gleichungen 40 (A) zeigen zunächst, wenn man sie nach t differenzirt, dass

$$\frac{dF}{dt}, \qquad \frac{dG}{dt}, \qquad \frac{dH}{dt}$$

Componenten und Gleichungen der (inneren) elektromotorischen Kraft.[1])

die partiellen Differentialquotienten einer Funktion ψ nach den Coordinaten sind, welche nur die Coordinaten enthalten kann. Bezeichnen wir diese Grössen mit $-P$, $-Q$, $-R$, so erhalten wir:

$$P = -\frac{dF}{dt} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

$$Q = -\frac{dG}{dt} = -\frac{\partial\psi}{\partial y} \cdot$$

$$R = -\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

Im Isolator, für welchen $C = o$ ist, liefern also die Gleichungen 68 (C'):

$$4\pi f = -k\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad 4\pi g = -k\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad 4\pi h = -k\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

(Die Ableitungen von F, G, H nach der Zeit sollen übrigens, auch wenn sie nicht partielle Differentialquotienten nach den Coordinaten sind, mit $-P$, $-Q$, $-R$ bezeichnet werden.) In allen Körpern, für welche C nicht gleich Null ist und die wir deshalb kurz Leiter nennen wollen, obwohl sie auch zugleich dielektrischer Polarisation fähig sein können, hat zu Anfang der Zeit die Gleichung 93 gegolten. Im Gleichgewichtszustande der Elektricität ist $p = q = r = o$ und daher liefern die Gleichungen 67 (D'):

94) $$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = o,$$

oder $\psi = \text{const}$. In den Leitern ist also auch:

$$4\pi\varepsilon = -k\Delta\psi = o,$$

während in den Isolatoren

95) $$4\pi\varepsilon = -k\Delta\psi$$

in denjenigen Punkten einen von Null verschiedenen Werth haben kann, wo vormals äussere elektromotorische Kräfte thätig waren.

---

[1]) Wenn man die äusseren elektromotorischen Kräfte, wie ich vorschlug, als die galvanischen und querikischen Kräfte bezeichnen würde, so wäre diese etwas unbequeme Unterscheidung zwischen äusserer und innerer elektromotorischer Kraft überflüssig.

Flächendichte der Elektricität.

104. In einer der oben besprochenen elektrisch geladenen Oberflächen, deren wenn auch sehr kleine Dicke δ heissen möge, ändert sich alles sehr schnell in der Richtung der Normalen. Wählen wir daher diese zur x-Axe, so verschwindet daselbst $\partial g : \partial y$ und $\partial h : \partial z$ gegen $\partial f : \partial x$. Es ist also, wenn do ein Element der Oberfläche und dx ein Dickendifferential vorstellt, welches noch gegen die Gesammtdicke δ der Oberflächenschichte unendlich klein ist, die im Volumelemente $do \, . \, dx$ enthaltene Elektricität:

$$\frac{df}{dx} do \, dx.$$

Die gesammte, dem Oberflächenelemente do anliegende Elektricität ist also:

$$do \int_x^{x+\delta} \frac{df}{dx} dx = do(f_1 - f_0) = -\frac{1}{4\pi}\left(k_1 \frac{d\psi}{dn_1} + k_0 \frac{d\psi}{dn_0}\right).$$

Die Indices Null und 1 beziehen sich dabei auf die Werthe zu beiden Seiten der Oberflächenschicht; n_0 und n_1 sind die beiden jedes Mal von der Oberfläche gegen das Innere des an der betreffenden Seite anliegenden Körpers hin gezogenen Normalen. Es fällt also n_1 mit der Richtung der positiven x-Axe, n_0 aber mit der Richtung der negativen x-Axe zusammen. Die Grösse

$$96) \qquad \eta = -\frac{1}{4\pi}\left(k_1 \frac{\partial\psi}{\partial n_1} + k_0 \frac{\partial\psi}{\partial n_0}\right)$$

bezeichnen wir als die Oberflächendichtigkeit der Elektricität im betreffenden Elemente der Oberfläche.

Bezieht sich der Index Null auf einen Leiter, so ist, wie wir sahen $d\psi : dn_0 = 0$, daher:

$$97) \qquad \eta = -\frac{k_1}{4\pi} \frac{d\psi}{dn_1}.$$

Es sind dies die geläufigen Gleichungen der Elektrostatik.

Dreizehnte Vorlesung.

Ponderomotorische Kräfte elektrisirter Kugeln; deren Abhängigkeit von k.

105. Wir wollen nun noch die Gesetze der ponderomotorischen Kräfte zwischen elektrisch geladenen Körpern aufsuchen. Wir betrachten zuerst einen ganz speciellen Fall. Ein überall hin unbegrenzter Isolator soll vom neutralen Zustande ausgegangen sein. Nur in gewissen Gebieten R sollen während einer gewissen Zeit äussere elektromotorische Kräfte thätig gewesen sein. Dann soll elektrisches Gleichgewicht eingetreten sein. Innerhalb der Gebiete R ist also dann:

Elektrostatische Fernwirkung.

95) $$-k\Delta\psi = 4\pi\varepsilon,$$

während im gesammten übrigen Raume

98) $$\Delta\psi = o \text{ ist.}$$

106. Wir wollen zunächst das Problem noch weiter specialisiren:

Erstens: Das Gebiet R soll eine sehr kleine Kugel vom Centrum O sein. Die äusseren elektromotorischen Kräfte, welche darin gewirkt haben, sollen nach allen von O ausgehenden Richtungen vollkommen gleichmässig thätig gewesen sein, so dass alles rings um den Punkt O herum vollkommen symmetrisch ist. Eine Spur von Leitung muss dabei das Abfliessen der anderen Elektricität in's Unendliche ermöglicht haben, oder diese muss auf einen Leiter übergegangen sein, der dann mechanisch entfernt wurde. Es ist dann ψ nur Funktion der Entfernung r des Aufpunktes vom Punkte O und muss ausserhalb der Kugel gemäss der Gleichung 98 die Form haben:

Gleichförmig elektrisirte Kugel.

99) $$\frac{A}{r} + B,$$

folglich ist:

$$f = \frac{kAx}{4\pi r^3}, \quad g = \frac{kAy}{4\pi r^3}, \quad h = \frac{kAz}{4\pi r^3}.$$

Zweitens: Das Gebiet R soll nun aus zwei derartigen Kugeln mit den Centren O und O' bestehen. Die Entfernung

Zwei gleichförmig elektrisirte Kugeln.

des Aufpunktes von O und O' soll r resp. r' heissen. Wir genügen offenbar den Gleichungen, wenn wir jetzt im ganzen Raume, mit Ausnahme des Innern der Kugeln setzen:

$$100) \qquad \psi = \frac{A}{r} + \frac{A'}{r'} + B.$$

Da diese Lösung, sowohl in der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes O, als auch in der des Punktes O' unendlich nahe mit der Lösung 99 zusammenfällt, so ist wohl kein Zweifel, dass sie dem Falle entspricht, dass beide Kugeln gleichmässig elektrisirt worden sind. Der exacte Beweis hierfür kann natürlich nur aus den Gleichungen 95 und 96 geliefert werden, und zwar müsste, wenn die Kugeln aus isolirendem Materiale bestehen, die ganze Elektrisirung derselben, also die Werthe von ε und η im Innern und an der Oberfläche der Kugeln gegeben sein.

Durch das Vorhandensein dieser beiden elektrisirten Kugeln erfährt das ganze unendliche Dielektricum eine gewisse dielektrische Polarisation. Um dieselbe zu berechnen, führen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein und bezeichnen die Coordinaten der Punkte O und O' mit $+b, o, o$ und $-b, o, o$, so dass die geradlinige Entfernung $OO' = c = 2b$ ist. Die Coordinaten des Aufpunktes P bezeichnen wir mit x, y, z; die Componenten der dielelektrischen Polarisation daselbst werden die Werthe haben:

$$101) \quad \begin{cases} f = -\frac{k}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{kA}{4\pi r^3}(x-b) + \frac{kA'}{4\pi r'^3}(x+b) \\ g = -\frac{k}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{kAy}{4\pi r^3} + \frac{kA'y}{4\pi r'^3} \\ h = -\frac{k}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{kAz}{4\pi r^3} + \frac{kA'z}{4\pi r'^3} \end{cases}$$

Die gesammte, durch die dielektrische Polarisation erzeugte Energie ist nach Formel 61 (α in Art. 88):

$$102) \quad \begin{cases} \Pi = \frac{2\pi}{k}\int d\tau\,(f^2+g^2+h^2) \\ = \frac{k}{8\pi}\int d\tau\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] \end{cases}$$

Da ausser der dielektrischen Polarisation sonst keinerlei elektrische oder magnetische Störungen im Felde vorhanden sind, so stellt dies offenbar den Gesammtwerth der elektromagnetischen Energie des Feldes dar.

Führt man für f, g, h die obigen Werthe ein, so stellt sich Π als Summe dreier Glieder dar, von denen das erste Π_1 den Faktor A^2, das zweite Π_2 den Faktor A'^2, das dritte Π_3 den Faktor AA' hat. Es ist dann der Gesammtwerth:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3,$$

wobei:

103)
$$\begin{cases} \Pi_1 = \frac{kA^2}{8\pi}\int\frac{d\tau}{r^4} \\ \Pi_2 = \frac{kA'^2}{8\pi}\int\frac{d\tau}{r'^4} \end{cases}.$$

Wir berechnen zuerst:

$$\Pi_3 = \frac{kAA'}{4\pi}\int d\tau\,\frac{x^2 - b^2 + y^2 + z^2}{r^3 r'^3}.$$

Behufs Ausführung der Integration wollen wir zur Bestimmung der Lage des Aufpunktes P cylindrische Coordinaten einführen, indem wir setzen:

$$y = \varrho\cos\vartheta \qquad \text{und} \qquad z = \varrho\sin\vartheta,$$

woraus, wenn die Integration nach ϑ sogleich durchgeführt wird, folgt:

$$d\tau = 2\pi\varrho\,d\varrho\,dx.$$

Da im Ausdrucke Π_3 die Grösse unter den Integralzeichen für negative und positive Werthe von x denselben Werth hat, so kann man die Integration bezüglich x von Null bis ∞ statt von $-\infty$ bis $+\infty$ erstrecken und mit 2 multipliciren und erhält so:

$$\Pi_3 = kAA'\int_0^\infty dx\int_0^\infty \varrho\,d\varrho\,\frac{x^2 + \varrho^2 - b^2}{\sqrt{(x^2 + \varrho^2 + b^2)^2 - 4b^2x^2}\,^3}.$$

Wir führen hier zunächst statt ϱ die neue Variable

$$u = x^2 + \varrho^2 + b^2$$

ein und erhalten:

$$\Pi_3 = \frac{k}{2} A A' \int_0^\infty dx \int_{x^2+b^2}^\infty du \, \frac{u - 2b^2}{\sqrt{u^2 - 4b^2x^2}^3} .$$

Das unbestimmte Integrale nach u hat den Werth:

$$-\frac{1}{\sqrt{u^2 - 4b^2x^2}} + \frac{u}{2x^2\sqrt{u^2 - 4b^2x^2}} = \frac{1}{2x^2}\frac{u - 2x^2}{\sqrt{u^2 - 4b^2x^2}} .$$

Das bestimmte zwischen den Grenzen $x^2 + b^2$ und ∞ genommene Integrale hat also für $x < b$ den Werth Null, für $x > b$ aber den Werth $1 : x^2$. Es ist also:

$$\Pi_3 = k A A' \int_b^\infty \frac{dx}{2x^2} = \frac{k A A'}{2b} = \frac{k A A'}{c} .$$

Es sollen nun die beiden elektrisirten Kugeln an sich vollkommen unverändert bleiben, nur die Entfernung c ihrer Centra soll um δc abnehmen. Man sieht leicht, dass dann Π_1 und Π_2 vollkommen unverändert bleiben, nur Π_3 wächst um

$$\delta \Pi_3 = \frac{k A A' \delta c}{c^2} .$$

Da sonst keine Energiequelle vorhanden ist, so muss diese Energie durch Arbeit gewonnen worden sein, welche die auf beide Kugeln von aussen wirkenden ponderomotorischen Kräfte geleistet haben. Um also die Centra beider Kugeln in den Punkten O und O' festzuhalten, muss auf jede Kugel von aussen eine ponderomotorische Kraft K wirken, welche die Entfernung c zu verkleinern strebt. Die Arbeit dieser Aussenkräfte bei der Abnahme von c um δc ist also $K . \delta c$, und da diese Arbeit die einzige Quelle für den oben gefundenen Energiezuwachs ist, so muss sie demselben gleich sein, woraus folgt:

104) $$K = \frac{k A A'}{c^2} .$$

Diese Kraft muss von aussen wirkend die beiden Kugeln gegeneinander treiben, um sie in Ruhe zu erhalten; die Kugeln selbst werden sich daher mit einer gleichen Kraft scheinbar abstossen.

Elektricitätsmenge auf einer leitenden Kugel.

107. Nun erst wollen wir zur Berechnung von Π_1 und Π_2 schreiten. Diese Grössen werden unendlich, wenn wir exact bis zu dem Punkt O und O' integriren. Es zeigt uns dies an, dass die Energie des Mediums unendlich werden muss, wenn endliche Elektricitätsmengen in mathematischen Punkten angehäuft werden sollen.

Wir müssen daher jetzt die unmittelbare Umgebung der beiden Punkte O und O' ins Auge fassen. Sei, wie es praktisch am häufigsten vorkommt, sowohl im Punkte O als auch im Punkte O' eine kleine leitende elektrisirte Kugel vorhanden. a und a' seien die Radien der beiden Kugeln; dann kann in deren unmittelbarer Umgebung in der Gleichung 100 das A' enthaltende Glied vernachlässigt werden. Es folgt also für $r > a$:

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{A}{r^2},$$

während man für $r < a$ im Innern eines Leiters ist und also hat:

$$\frac{d\psi}{dr} = 0.$$

Wir wollen die Werthe, welche diese beiden Differentialquotienten unmittelbar an der Oberfläche der Kugel annehmen, durch die Indices 1 und Null bezeichnen, so dass man also hat:

$$\left(\frac{d\psi}{dr}\right)_1 = -\frac{A}{a^2}, \qquad \left(\frac{d\psi}{dr}\right)_0 = 0.$$

In der Formel 96 ist jetzt zu setzen:

$$\frac{d\psi}{dn_1} = \left(\frac{d\psi}{dr}\right)_1$$

$$\frac{d\psi}{dn_0} = -\left(\frac{d\psi}{dr}\right)_0,$$

woraus sich ergiebt:

$$\eta = \frac{kA}{4\pi a^2}.$$

Für die gesammte, auf der Kugel befindliche Elektricitätsmenge ergiebt sich also der Werth:

$$E = 4\pi a^2 \eta = kA.$$

Ebenso findet man für die auf der anderen Kugel befindliche Elektricitätsmenge den Werth:

$$E' = kA'$$

und die Formel 104 geht über in:

105) $$K = \frac{EE'}{kc^2} .$$

Nun kann auch Π_1 berechnet werden. Da sich das Innere der Kugel in normalem Zustande befindet, so liefert die Formel 103:

106) $$\Pi_1 = \frac{kA^2}{2}\int_a^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{kA^2}{2a} = \frac{E^2}{2ka} .$$

Man sieht, dass die früher gemachte Annahme in der That berechtigt war, dass Π_1 und Π_2 nicht Funktionen von c sind.

Elektricitätsmenge in einer isolirenden Kugel.

108. Es wird praktisch selten vorkommen, aber immerhin auch möglich sein, dass die beiden Kugeln von derselben Substanz wie der umgebende Raum erfüllt sind, und dass Kräfte thätig waren, welche das Innere dieser Kugeln elektrisirt (z. B. gleichmässig mit Elektricität von der constanten Dichte ε erfüllt) haben.

Da die Kugeln unendlich klein sind, kann man im Innern der einen immer den Einfluss der anderen vernachlässigen. Es wird daher nach Gleichung 95

$$\Delta\psi = \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi}{dr} = -\frac{4\pi\varepsilon}{k} = \text{const.}$$

Daher:

$$\psi = -2\pi\varepsilon r^2 : 3k,$$

da ψ für $r = o$ nicht unendlich werden darf und eine additive Constante keine Rolle spielt. Soll jetzt an der Oberfläche der Kugel keine Elektricität angehäuft sein, so müssen die beiden Grössen:

$$\left(\frac{d\psi}{dr}\right)_0 = -\frac{4\pi\varepsilon a}{3k} \quad \text{und} \quad \left(\frac{d\psi}{dr}\right)_1 = -\frac{A}{a^2}$$

den gleichen Werth haben, woraus folgt:

$$\varepsilon = 3kA : 4\pi a^3.$$

Die gesammte, auf der Kugel befindliche Elektricität aber hat den Werth:

$$E = 4\pi a^3 \varepsilon : 3 = k A,$$

welcher mit dem früher gefundenen übereinstimmt.

Abhängigkeit der Wirkungen von k und μ.

109. Die Formel 105 zeigt, dass die ponderomotorische Kraft dem k verkehrt proportional ist, also in demselben Verhältnisse kleiner wird, je grösser k ist, wenn gleiche Elektricitätsmengen in verschiedenen Medien aufeinander wirken. Wenn man die Versuche, durch welche die statische Einheit der Elektricität bestimmt wird, in anderen Medien als Luft ausführen würde, so würde dieselbe der Wurzel aus k direct proportional, also die Zahl, welche die gleiche Elektricitätsmenge statisch ausdrückt, dieser Wurzel verkehrt proportional herauskommen. Da wir identische Formeln für Magnetpole erhalten werden, so gilt dasselbe bezüglich der Constante μ für Magnetpole, d. h. für Solenoidpole, welche in das neue Medium gebracht werden, ohne dass der Stoff, welcher das Innere der Drahtringe erfüllt, gewechselt wird.

Aus der Formel 79 dagegen folgt, dass die elektrodynamischen und aus Formel 74, dass die Induktionswirkungen gleicher Ströme in verschiedenen Medien dem μ direct proportional, daher die elektrodynamische Stromeinheit $\sqrt{\mu}$ verkehrt proportional ist. Dasselbe gilt natürlich auch von Solenoiden, wenn das Medium sowohl in der Umgebung als auch im Innern beider gewechselt wird. Die Wirkung eines Stromes auf ein Solenoid, in dessen Innern das Medium nicht wechselt (Magnet), also auch eines Solenoids, in dessen Innern das Medium wechselt, auf ein anderes Solenoid, in dessen Innern das Medium nicht wechselt, bleiben unverändert. Die elektromagnetische Stromeinheit aber ist $\sqrt{\mu}$ verkehrt proportional, da die Einheit des Magnetismus dieser Grösse direct proportional ist; je mehr Magnetismus aber, desto weniger Strom braucht man zur Erzielung der gleichen Kraft.

Vierzehnte Vorlesung.

Statisches und magnetisches Maass. Elektrostatische Kräfte allgemein. Magnete. Schluss.

Statisches Maass.

110. Es wird bei der Klasse von Erscheinungen, welche wir jetzt betrachten, am naturgemässesten sein, die Einheit von E so zu wählen, dass, wenn jede der Kugeln mit ihr geladen ist, sie in der Distanz 1 die Abstossung 1 in Luft aufeinander ausüben. Dann wird Constante k für Luft den Werth eins haben und man erhält aus 105:

$$107) \qquad K = \frac{E_s E'_s}{c^2}.$$

Der Index s wurde beigefügt, weil wir dieses Maasssystem das statische nennen. Die Constante des Ampère'schen Gesetzes wird dann keinen einfachen Zahlenwerth annehmen; sie ist nach bekannten Methoden bestimmt worden und da diese Bestimmungen alle in das Gewand der alten Theorie gekleidet sind, so muss ich ihre Resultate hier auch vom Standpunkte der alten Theorie vortragen.

Umrechnung beider Maasssysteme.

111. Ich will da eine kleine Gedächtnisshülfe mittheilen, durch welche man, wenn man gerade kein Lehrbuch zur Hand hat, sofort die Umrechnung des statischen ins magnetische Strommaass im Kopfe ausführen kann.

Wir denken uns zwei statisch gemessene Elektricitätsmengen 1 in der Entfernung $\varrho = 1$. Dieselben stossen sich mit der Kraft 1 ab. Nun sollen sie beide mit der Geschwindigkeit v gleichgerichtet und senkrecht zu ϱ bewegt werden. Sie stellen dann gleichgerichtete Stromelemente von der Länge 1 dar, deren statisch gemessene Stromintensität $i_s = v$ ist.[1])

---

[1]) Wären in einem langen Drahte in Punkten, die den Abstand 1 hätten, je Elekricitätsmengen 1, die sich mit der Geschwindigkeit v bewegten, so würde daselbst die statische Stromstärke v herrschen. Wäre die Längeneinheit des Drahtes mit der statischen Elektricitätsmenge eins geladen, und würde sich der Draht sammt seiner Ladung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in seiner Richtung bewegen, so wäre die

Sie üben jetzt auch eine elektrodynamische Anziehung aufeinander aus und diese wird nach dem Grassmann'schen Gesetze gleich der elektrostatischen Abstossung, wenn die magnetisch gemessene Stromintensität gleich 1 ist. Bezeichnen wir daher den Werth, welchen v in diesem Falle annimmt, mit $\mathfrak{V}$, so ist jetzt die magnetisch gemessene Stromintensität $i_m = 1$, die statisch gemessene aber $i_s = \mathfrak{V}$; da aber die Zahlen, welche man erhält, wenn man die Stromintensität einmal in dem einen, das andere Mal in dem anderen Maasse misst, offenbar einander proportional sein müssen, so muss für jeden Strom

$$i_s = i_m \mathfrak{V} \text{ sein.}$$

Da beide Maasssysteme so gewählt sind, dass die Constante des Joule'schen Gesetzes gleich 1 wird, so ist, wenn e die elektromotorische Kraft bedeutet:

$$e_s i_s = e_m i_m \quad \text{oder} \quad e_s = e_m : \mathfrak{V}.$$

Da endlich auch die Constante des Ohm'schen Gesetzes in beiden Maasssystemen gleich 1 ist, so hat man, wenn ω den Widerstand bezeichnet:

$$i_s \omega_s : e_s = i_m \omega_m : e_m, \text{ also } \omega_s = \omega_m : \mathfrak{V}^2.$$

Nun sahen wir, dass nach dem Ampère'schen Gesetze die Anziehung, welche zwei Stromelemente aufeinander ausüben, den Werth hat:

$$\frac{i_m i'_m ds\, ds'}{r^2}\left[2\sigma - 3\varrho\varrho'\right] = \frac{i_s i'_s ds\, ds'}{\mathfrak{V}^2 r^2}\left(2\sigma - 3\varrho\varrho'\right).$$

Vergleicht man dies mit der Formel 79, so findet man, dass die Constante μ für Luft im elektrostatischen Maasse gemessen den Werth $\mu_s = 1 : \mathfrak{V}^2$ haben muss.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen in Luft.

112. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen in einem nichtleitenden Dielektricum fanden wir den Werth: $V = 1 : \sqrt{\mu k}$.

Wenden wir das elektrostatische Maasssystem an, so ist für Luft: $\mu_s = 1 : \mathfrak{V}^2$, $k_s = 1$ daher $V = \mathfrak{V}$.

113. Natürlich könnten wir auch das in den früheren Vor-

---

elektrostatische Abstossung auf einen parallelen, gleich geladenen und gleich bewegten gleich der elektrodynamischen Anziehung ihrer Convectionsströme.

lesungen angewendete magnetische Maasssystem gebrauchen. Man kann ja nach dem Vorgetragenen ohne Weiteres $df : dt$, was ja eine Stromstärke darstellt, in magnetischem Strommaasse messen, daraus durch Integration nach t die Grössen f, g, h und folglich auch ε, η und E (z. B. die Ladung eines Condensators) im magnetischen Maasse ausdrücken (vgl. vierte und fünfte Vorlesung).

Würde man diesen Weg einschlagen, so hätte die Constante μ den Werth:

$$\mu_m = 1.$$

Man findet dann aus den Betrachtungen des Art. 111, dass die Constante k der Formel 105 nicht gleich 1, sondern gleich:

$$k_m = 1 : \mathfrak{V}^2$$

ist. Denn die Grössen E und E' dieser Formel verhalten sich wie $\int i\,dt$, also wie i. Wir fanden aber:

$$i_s = i_m \mathfrak{V}, \text{ daher auch } E_s = E_m \mathfrak{V},$$

daher liefert die Formel 107:

$$K = \frac{E_m E'_m \mathfrak{V}^2}{c^2}.$$

Dies mit Formel 105 verglichen, liefert den eben angeführten Werth für k_m. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in Luft ergiebt sich jetzt:

$$1 : \sqrt{\mu_m k_m}.$$

Also natürlich derselbe Zahlenwerth wie früher.

Selbstpotential einer elektrisirten Kugel.

Die Formel 106 liefert bei Anwendung des elektrostatischen Maasses:

$$\Pi_1 = E^2_s : 2a,$$

dies ist bekanntlich das Selbstpotential der auf einer Kugel aufgehäuften Elektricität, also die gesammte, zu ihrer Ladung erforderliche Arbeit, welche hier nothwendig gleich der im Medium vorhandenen Energie der dielektrischen Polarisation sein muss, da wir Fernwirkung ausschliessen und im Innern der leitenden Kugel der neutrale Zustand, also keine Energie vorhanden ist.

Allgemeine Berechnung der Fernwirkung statischer Elektricität.

114. Nun können wir leicht die ponderomotorischen Kräfte finden, welche beliebige Elektricitäten auf beliebige andere ausüben. Man denke sich zu diesem Zwecke zwei Systeme elektrischer Ladungen gegeben. Das erste System

soll dadurch bestimmt sein, dass gewisse Volumelemente $d\tau$ gewisse Elektricitätsmengen $\varepsilon_1 d\tau$, gewisse Flächenelemente do ebenfalls Elektricitätsmengen $\eta_1 do$ enthalten; das zweite dadurch, dass gewisse andere Volumelemente Elektricitätsmengen $\varepsilon_2 d\tau$, gewisse Flächenelemente Elektricitätsmengen $\eta_2 do$ enthalten. Das Gesammtpotentiale ψ in einem Aufpunkte ist dann eine Summe, $\psi_1 + \psi_2$, wobei ψ_1 das Potential ist, welches herrschen würde, wenn nur das erste System, ψ_2 wenn nur das zweite System elektrischer Massen vorhanden wäre. Die Gleichung 102 liefert dann wieder:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3,$$

wobei:

$$\Pi_1 = \frac{k}{8\pi}\int d\tau \left[\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$\Pi_2 = \frac{k}{8\pi}\int d\tau \left[\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$\Pi_3 = \frac{k}{4\pi}\int d\tau \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\frac{\partial \psi_2}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial y}\frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z}\frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right].$$

Π_1 ist lediglich von der Lage der elektrischen Massen des ersten, Π_2 von der des zweiten Systems abhängig, Π_3 dagegen stellt die Energie der Wechselwirkung beider Systeme dar.

Bleiben die Massen des ersten Systems gegeneinander unverrückt, ebenso die des zweiten und ändern nur die beiden Systeme ihre relative Lage, so ändert sich daher nur Π_3 und seine Veränderung giebt die dabei geleistete Arbeit.

Die partielle Integration des obigen Ausdruckes für Π_3 aber liefert nach bekannten Methoden:

$$\Pi_3 = -\frac{k}{4\pi}\int do\, \psi_2 \frac{d\psi_1}{dn} - \frac{k}{4\pi}\int d\tau\, \psi_2 \Delta \psi_1$$

$$= \int do\, \eta_1 \psi_2 + \int d\tau\, \varepsilon_1 \psi_2,$$

wobei do ein Element einer beliebigen Trennungsfläche zweier Körper, n sowohl auf der einen als auf der anderen Seite die von do weg gegen das Innere des an der betref-

fenden Seite angrenzenden Körpers hin gezogenen Normale vorstellt.

Da nun ψ dem entspricht, was man in der alten Theorie das Potential auf die Elektricitätsmenge 1 oder kurz die Potentialfunktion genannt hat, so ist der zuletzt gefundene Ausdruck das gesammte Potential des einen Systems elektrischer Massen auf das andere. Seine Veränderung drückt die geleistete Arbeit aus. Seine Ableitungen nach den verschiedenen Coordinaten liefern also die Kräfte.

Experim. Bestimmung der Dielektricitätsconstante.

115. Wir wollen nun wieder einen kurzen Blick auf Erscheinungen werfen, die wir im Allgemeinen von der Betrachtung ausgeschlossen haben. Wir denken uns ein rechtwinkliges Coordinatensystem. Die yz-Ebene soll eine sehr grosse leitende Ebene darstellen. Der Raum, welcher die Punkte umfasst, deren Abcissen zwischen Null und l_1 liegen, soll mit einem Dielektricum erfüllt sein, in welchem k den Werth k_0 hat; ebenso der Raum, welcher die Punkte umfasst, deren Abscissen zwischen $l_1 + d$ und $l_1 + d + l_2$ liegen. Der Raum dagegen, welcher die Punkte umfasst, deren Abscissen zwischen den Grenzen l_1 und $l_1 + d$ liegen, soll mit einem Dielektricum, für welches k den Werth k_1 hat, erfüllt sein; endlich soll die Fläche, für welche x gleich $l_1 + l_2 + d$ ist, die Begrenzungsfläche eines zweiten Leiters sein, welcher sich nach der Seite der wachsenden Abscissen hin erstreckt. Bis auf die Punkte in der Nähe des Randes der leitenden Platten, welchen wir allenthalben unendlich weit entfernt voraussetzen, wird $g = h = 0$, f aber nur eine Funktion von x sein. Es seien alle elektrischen Ströme und Oscillationen abgelaufen, so dass die Gleichungen des Art. 103 gelten. Der Ausdruck $\Delta\psi$ reducirt sich daher auf

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}.$$

Beide Dielektrica sollen aus dem normalen Zustande, ohne dass im Innern derselben durch Reibung etc. Elektricität entwickelt wurde, in ihren jetzigen Zustand übergegangen

sein. Dann ist nach dem Gesagten daselbst überall $\varepsilon = 0$; daher nach Gleichung 98 auch

$$108) \qquad \frac{d^2\psi}{dx^2} = 0.$$

Wenn wir die Grenzschichten als dünne Uebergangsschichten auffassen, so gilt das Gleiche auch von jedem Punkte im Innern einer Grenzschicht. Ueberall ist $\varepsilon = 0$; daher muss, wenn die Schichtendicke sehr klein wird, auch $\eta = 0$ sein. Die letztere Bedingung liefert mit Rücksicht auf die Gleichung 96:

$$109) \qquad k_0 \frac{d\psi}{dn_0} + k_1 \frac{d\psi}{dn_1} = 0,$$

welche Gleichung auch bei allen anderen Problemen an der Trennungsfläche zweier Dielektrica erfüllt sein muss, wenn daselbst niemals durch Reibung etc. Elektricität entwickelt wurde. Da $d\psi : dn$ an der Grenzschicht einen endlichen Sprung macht, muss ψ selbst continuirlich sein. Sei für $x = 0$, $\psi = 0$; für $x = l_1 + l_2 + d$ aber habe ψ einen gegebenen Werth Ψ. Den Werth des ψ für $0 < x < l_1$ bezeichnen wir mit ψ_1, dann ist also:

$$\psi_1 = Ax.$$

Für $l_1 < x < l_1 + d$ muss ψ die Form $\psi_2 = Bx + C$ haben. Für die Ebene $x = l_1$ ist:

$$\frac{d\psi}{dn_0} = -\frac{d\psi_1}{dx} = -A, \qquad \frac{d\psi}{dn_1} = \frac{d\psi_2}{dx} = B,$$

daher liefert die Gleichung 109:

$$k_1 B - k_0 A = 0.$$

Da ψ selbst continuirlich ist, so folgt:

$$A k_1 l_1 = A k_0 l_1 + C k_1.$$

Wendet man dieselben Bedingungen auf die Ebene $x = l_1 + d$ an, so ergiebt sich für:

$$l_1 + d < x < l_1 + d + l_2$$

für ψ der Werth:

$$\psi_3 = Ax + Ad\frac{k_0 - k_1}{k_1};$$

Daher wird:

$$k_1 \Psi = A k_1 l + A k_0 d,$$

wobei $l = l_1 + l_2$ gesetzt wurde. Da in der Ebene $x = l + d$ wieder ein Leiter beginnen soll, so ist die auf der Fläche $\mathfrak{F}$ desselben angehäufte Elektricität nach Gleichung 97 zu berechnen und hat den Werth:

$$E = \eta \mathfrak{F} = \mathfrak{F} \frac{k_0}{4\pi} \frac{d\varphi_3}{dx} = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{F} A k_0.$$

Daher ist:

110) $$\frac{\Psi}{E} = \frac{4\pi}{\mathfrak{F}} \left(\frac{l}{k_0} + \frac{d}{k_1} \right).$$

Dieser Quotient heisst die reciproke Capacität des aus beiden leitenden Platten zusammengesetzten Condensators, wenn die gesammte Fläche jeder Platte gleich $\mathfrak{F}$ wäre. Ist das erste Dielektricum Luft und misst man im elektrostatischen Maasse, so wird:

$$k_0 = 1$$

und man findet daher für die reciproke Capacität

$$\frac{\Psi}{E} = \frac{4\pi}{\mathfrak{F}} \left(l + \frac{d}{k_1} \right).$$

Hätte k_1 denselben Werth, wie für Luft, so wäre die reciproke Capacität:

$$\frac{\Psi}{E} = \frac{4\pi}{\mathfrak{F}} \left(l + d \right).$$

Der Umstand, dass ein Theil der Zwischenschicht durch ein von Luft verschiedenes Dielektricum gebildet wird, hat also denselben Effect, als ob die Dicke d der Schicht, welche von dem Dielektricum erfüllt wird, im Verhältnisse $1 : k_1$ vermindert wäre. Ist bei unveränderter Distanz der leitenden Platten der Zwischenraum zwischen denselben einmal ganz mit Luft, das andere Mal ganz mit jenem von Luft verschiedenen Dielektricum erfüllt, so ist die Capacität im zweiten Falle k_1 mal so gross, worauf bekanntlich die einfachste Bestimmungsmethode der Dielektrisirungszahl oder Dielektricitätsconstante k beruht.

Magnetisirungsgleichungen.

116. Setzen wir:

111 (*F*) $$\alpha = \frac{a}{4\pi\mu}, \quad \beta = \frac{b}{4\pi\mu}, \quad \gamma = \frac{c}{4\pi\mu},$$

so erhalten wir für diese Grössen ganz ähnliche Gleichungen, wie die soeben discutirten für einen vollkommenen Isolator bei Abwesenheit äusserer elektromotorischer Kräfte geltenden, nur dass an Stelle von $f, g, h, P, Q, R, k : 4\pi, \psi$ jetzt der Reihe nach treten $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, 4\pi\mu, \varphi$. Ausserdem erscheint in den Gleichungen, welche wir die Stokes'schen nannten, das Zeichen verkehrt, als ob das Coordinatensystem in sein Spiegelbild verkehrt wäre und in den Dielektrisirungs- und Magnetisirungsgleichungen bei den Constanten der Faktor 4π mit $1 : 4\pi$ vertauscht. Man hat nämlich:

$$A) \quad \frac{da}{dt} = \frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{dy}, \qquad C') \quad 4\pi f = kP,$$

$$B') \quad \frac{df}{dt} = \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \qquad F) \quad \frac{a}{4\pi} = \mu\alpha.^{1})$$

Magnetismus. Dies beweist, dass die Wirkung von Solenoidpolen in Medien, wo die Constante μ verschiedene Werthe hat, in ganz analoger Weise modificirt wird, wie die Wirkung der freien Elektricität der Medien mit verschiedenen k. So sahen wir, dass die Trennungsfläche zweier Medien, in denen k verschiedene Werthe hat, unter dem Einflusse elektrischer Kräfte sich so verhält, als ob dort fern wirkende Elektricität vorhanden wäre; analog wird die Trennungsfläche zweier Medien mit verschiedenen Werthen von μ sich so verhalten, als ob dort Solenoidpole (Magnetismen) vorhanden wären.

Wir nannten f, g, h die Componenten der dielektrischen Polarisation oder des dielektrischen Momentes der Volumeinheit, P, Q, R die Componenten der elektrischen Kraft (wirkend auf die Elektricitätsmenge 1), ψ das elektrische

---

[1]) Ueber diese Analogie vgl. Rowland, *Amer. journ. of math.*, vol. II, p. 354; vol. III, p. 89, 1879 und 1880.

Potentiale (ebenfalls auf einen Aufpunkt, in dem sich die Elektricitätsmenge 1 befindet), k die Dielektrisirungszahl oder Dielektricitätsconstante. Gerade so sollen jetzt α, β, γ die Componenten der magnetischen Polarisation oder des magnetischen Momentes der Volumeinheit, a, b, c die der magnetischen Kraft, φ das magnetische Potential, μ die Magnetisirungszahl oder Magnetisirungsconstante heissen. An Stelle der statischen Elektricität tritt aber jetzt die Wirkung von Solenoidpolen. Permanente Magnete denken wir uns immer als Systeme von Molekülen, die solenoidartig von elektrischen Strömen umflossen sind.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen in Isolatoren können wir jetzt schreiben:

$$V = \mathfrak{V} : \sqrt{k_s \mu_m},$$

daher für die Brechungsexponenten:

112) $$\mathfrak{V} : V = \sqrt{k_s \mu_m}.$$

Wir haben nun die Formeln entwickelt und uns so weit orientirt, dass wir deren Bedeutung kennen gelernt, uns von ihrer Uebereinstimmung mit der Erfahrung im Allgemeinen überzeugt und sie zur Anwendung auf sämmtliche Probleme der Elektrostatik und Elektrodynamik, der Lehre von den elektrischen und optischen Schwingungen zurecht gelegt. Wir haben gewissermaassen die Tafel gedeckt, die Speisen zubereitet und ab und zu verkostet; haben aber keine Zeit mehr, uns zu Tische zu setzen.

Erster Anhang.

Literaturübersicht.

Leider fehlte es mir an Zeit und Material, um diese Uebersicht vollständig zu machen; hätte ich dem Vorwurfe der Unvollständigkeit und Uncorrectheit entgehen wollen, so wäre mir nichts übrig geblieben, als sie ganz auszulassen, wofür mir doch kaum alle Leser Dank gewusst hätten. Auf fehlendes bitte ich mich aufmerksam zu machen.

I. Lehrbücher, die Maxwell's Elektricitätstheorie mehr oder minder eingehend behandeln.

Maxwell, A treatise on electricity and magnetisme. Oxford, Clar. press. 1881. Deutsch von Weinstein. Berlin, Springer 1883.

—— An elementary treatise on electricity. Oxford, Clar. pr. 1888. Deutsch von L. Grätz. Braunschweig, Vieweg 1883.

Wiedemann, G., Lehre von der Elektricität, a. a. O. IV. p. 1159 u. 1184. Braunschweig, Vieweg 1885.

Poincaré, Electricité et optique. Paris, Carré 1890.

Gordon, J. E. H., a physical treatise on electr. and magn. London, Sampson Low. 1880.

Tumlirz, die elektromagnetische Theorie des Lichts. Leipzig, Teubner. 1883.

Mascart und Joubert, Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus. Deutsch von Levy. Berlin, Springer. 1886.

Grimaldi, G. P., La teoria elettromagnetica del Maxwell e le sperienze di H. Hertz. Roma, tip. dell' Acc. dei Lincei; 1889. (40 pag.) (Leichtverständl. historische Darstellung.)

II. Abhandlungen über die Grundlagen der Maxwell'schen Theorie.

Faraday, Experimental researches on Electricity. 3 vols. London 1839—55 (oder Neudruck).

Maxwell, on Faraday's lines of force. Scient. Pap. Cambridge, Univ. press, 1890. I. p. 155. Cambr. Phil. S. Transact. vol. X. p. 1. geles. 10./12. 1855.

Maxwell, On a method of drawing the forms of F. lines of force without calc. Scient. Pap. I p. 241. Brit. Ass. Rep. 1856.
—— On physical lines of force, Scient. Pap. I. p. 451; Phil. Mag. (4) vol. **21.** p. 161, 281, 338, 1861; **23.** p. 12, 85, 1862.
—— A dynamical theory of the electromagn. field, Scient. Pap. I. p. 526. Roy. Soc. Trans. vol. 155, p. 459. gel. 8./12. 1864.
—— On the theory of maintenance of el. curr. by mech. work without use of perm. magnets; Scient. Pap. II. p. 79. Proc. R. S. 1867.
—— Experiment in magn. electr. induction; Scient. Pap. II. p. 121. Phil. Mag. 1868.
—— On a meth. of m. a. d. comparison of electrostat. with electromagn. force, w. a note on the electromag. theory of light; Scient. Pap. II. p. 125. Lond. Phil. Transact., 158. 1868.
—— On the induction of el. current in a inf. plane sheet of u. cond. Scient. Pap. II. p. 286. Proc. R. S. 1872.
—— On action in distance, Scient. Pap. II. p. 311. Proc. R. Inst. vol. **7.**
von Helmholtz, Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende, leitende Körper. Verh. d. naturh. Vereins zu Heidelberg, 21. Januar 1870. Borch. Journ. **72.** p. 57. 1870. Fortgesetzt: ebenda **75.** p. 35. 1872. **78.** p. 273. 1874. Berl. Ber., 18. April 1872, 6. Febr. 1873, 17. Juni 1875. — Wiss. Abhandlungen Bd. I. S. 545.
Stefan, Ueber die Gesetze der magnetischen und elektrischen Kräfte in magn. und el. Medien und ihre Beziehung zur Theorie des Lichtes. Sitzungsber. der Wien. Akad. **70.** p. 589. 1874.
Rowland, On the general equations of electromagn. action. Amer. Journ. of math. Vol. II. p. 354. 1879. Vol. III. p. 89 Phil. Mag. (4) **50.** p. 257. 1876. Sill. J. (3) **10.** p. 325. 451. 1875.
J. J. Thomson, Einwände gegen Rowland. Nature **24.** p. 204. 1881.
Hertz, Ueber die Grundgleichungen der Elektrodynamik für ruhende Körper. Gött. Nachr. März 1890. Wied. Ann. **40.** p. 577. 1890.
—— Dass. für bewegte Körper. Wied. Ann. **41.** p. 369. 1890.
E. Cohn, Systematik der Elektricitätslehre. Wied. Ann. **40.** p. 625. 1890.
Heaviside, On electromagnetic waves. Electrician 3 Jan. 1885 Phil. Mag. Febr. 1888. Phil. Mag. (5) **6.** p. 177. 1878. **24.** p. 479. 1887. **25.** p. 130. 202. 379. 1888. **26.** p. 360. 434. 488. 1888. **27.** p. 89. 1889.

III. Andere auf die allgemeine Maxwell'sche Theorie Bezug habende Abhandlungen.

Beltrami, Interpret. mec. delle formole di Maxwell. Mem. Istit. di Bologna (4) **7.** 38. 1886. Nuov. Cim. (3) **20.** p. 5.
Cesàro, Roma, Acc. d. Lincei **5.** p. 199. 1889. An d. vorige anschliessend.

Blondlot, Elementare Ableitung der Spannung und des Druckes im elektrischen Felde. Journ. de phys. (6) **2.** p. 507. 1887.

Desaulx, Ann. d. l. soc. scient. de Brux. **12.** 1887/8. (Aehnliches).

Adler, Zwangszustand im elektrischen Felde. Wiener Sitzungsber. **89.** p. 594. 1884. **95.** p. 50. 180. 1887. **96.** p. 1037. 1305. 1887.

Seydler, Elektrische Spannungstheorie vom Standpunkte der Elasticitätslehre. Ber. der böhm. Ges. der Wissensch. 1882, 7. Dec. 1883.

Grinwis, Einfluss eines Leiters auf die Energievertheilung im Felde. Arch. neerl. **21.** p. 251. 1887.

L. Lodge, Mech. illust. of passage of Electr. Phil. Mag. Nov. 1876, of Thermoelectr. Dec. 1876.

—— Modell d. elektr. Absorpt. Phil. Mag. (5) **2.** p. 353. 524. 1876.

Grätz, Notiz über die Maxwell'schen Molekularwirbel. Wied. Ann. **25.** p. 165. 1885.

Poynting, Zusammenhang zwischen elektrischen Strömen, elektrischen und magnetischen Verschiebungen. Lond. Proc. R. S. **38.** p. 168. 1885.

J. J. Thomson, Ist die Annahme Maxwell's richtig, dass sich die Elektricität wie eine incompressible Flüssigkeit verhält? Proc. Lond. Math. Soc. **19.** p. 520. 1889.

Poynting, Theorie der el. Absorpt. Phil. Mag. (5) **21.** p. 419. 1886.

Rowland, Theorie d. el. Absorption. Amer. Journ. of math. **1.** p. 53. 1873.

Fernwirkung erlöschender Ringmagnete. Hertz, Wied. Ann. **23.** p. 84. 1884. Aulinger **27.** p. 119. 1886. Lorberg **27.** p. 666. 1886. Boltzmann **29.** p. 598. 1886. **31.** p. 139. 1887.

El.-dyn. Wirkung von Convectionsströmen. Rowland, Berl. Ak. März 1876. Pogg. Ann. **158.** p. 487. 1876. Lecher, Rep. der Phys. **20.** p. 151. 1884. Röntgen, Berl. Ber. 19./1. 1888.

El.-dyn. Wirk. veränderl. diel. Polar. Röntgen, Berl. Ak. 26. Febr. 1885.

Zur Schlussbemerkung von Art. 33. Colley, Wied. Ann. **17.** p. 55. 1882. **18.** p. 704. 1883. Borgmann, J. d. phys. Ges. zu Petersburg. **13.** p. 414. 1881. **14.** p. 15. 260. 1882.

Wirk. von Inductionsströmen auf stat. El. Lippmann, Par. C. R. **89.** 21. Juli 1879. Lodge, Proc. Phys. Soc. Lond. **10.** p. 116. 1889.

Modelle zur Veranschaulichung.

Fitzgerald, Modell f. einige Eigenschaften d. Aethers (Räder mit elastischen Schnuren verbunden). Dubl. Proc. R. S. p. 407. 1885.

Sir W. Thomson, Veranschaulichung der mechanischen Theorie der Induction in Körpern durch Flüssigkeitswirbel. Rep. Brit. Ass. 1888. p. 567. 570.

L. Rayleigh, Modell der Maxw. Theorie. Proc. Phys. Soc. Lond. **10.** p. 434, Nov. 1890.
Gwyther, Schwingungsgleichungen des Aethers. Cambr. Proc. Phil. Soc. **5.** 280. 1885. Vgl. auch oben Lodge.

IV. Andere mechanische Electricitätstheorien.

Helm, Aether in Leitern flüssig, in Isol. fest; bewegte gelad. Körper sind fortschreitende Verflüssigungen. Wied. Ann. **14.** p. 149. 1881.

Theorien, die nur auf der Hypothese fussen, dass die elektrische Fernwirkung Zeit braucht.

Gauss, Briefwechsel. Werke. **5.**
Riemann, Pogg. Ann. **131.** p. 237.
Lorenz, Pogg. Ann. **118.** p. 111. 1863. **121.** p. 579. 1864. **131.** p. 243. Wied. Ann. **7.** p. 161. 1879.
Karl Neumann, Die elektrischen Kräfte. Leipzig, Teubner. 1875. Principien d. Elektrodynamik. Tübingen 1868. Clebsch Ann. **1.** p. 317. 1869.
Loschmidt, Wien. Ber. **58.** p. 17. 1868.
Edlund, Théorie des phénomènes électriques; Mém. de l'Ac. r. de Suède. XII. 1873. N. 8.

Theorien, die auf Analogie mit Flüssigkeitsströmen beruhen.

Loschmidt, Wiener Ber. **58.** p. 596. 1868.
Decharme, Par. C. R. **94.** p. 440. 643. 1882. **95.** p. 87. 1882. Ann. de chim. (5) **29.** p. 404. 1883.
Secchi, Die Einheit der Naturkräfte. Leipzig 1876.
Boulanger, Lum. élect. **20.** p. 241. 1886.

Wirbeltheorien der magnetischen und elektrischen Kräfte.

Hankel, Theorie der elektrischen Erscheinungen. Pogg. Ann. **126.** p. 440. 1865. **131.** p. 607. 1867.
W. M. Hicks, Rep. Brit. Ass. 1888. p. 577.
Euler's Briefe, deutsch von Kries. 1794. 3. Brief. p. 190—197.
Bjerknes, Paris, C. R. **88.** p. 165. 280. **89.** p. 144. 1879. **93.** p. 303. Nat. **24.** p. 360. 1881.
Challis, Phil. Mag. (4) **43.** p. 401. 1872.
Thomson, Phil. Mag. (4) **7.** p. 502. **8.** p. 42. 1854.
Ermacora sopra un modo . . . Padua 1882.
Ledieu. Paris. C. R. **95.** p. 669. 753. 1882.
Reynard, Ann. d. chim. (4) **19.** p. 272. 1870.
Moutier, Ann. d. chim. (5) **4.** p. 267. 1875.

Glazebrook, Elektrodynamische Wirbeltheorie. Phil. Mag. (5) **11.** p. 397. 1884.
(Vergleiche auch die letzten unter III citirten Abhandlungen.)

V. Ueber elektrische Schwingungen im Allgemeinen.

Allgemeine Theorie.

Thomson, Phil. Mag. (4) **5.** p. 393. 1855.
v. Helmholtz, Koosen, Pogg. Ann. **83.** p. 505. **91.** p. 258. 427. 446. 1854. Erhalt. d. Kraft. p. 44. Naturh. V. zu Heidelb., April 1869. Wiss. Abh. I. Bd. p. 12.
Kirchhoff, Ueb. d. Beweg. der El. in Drähten. Pogg. Ann. **100.** p. 193. 351. 1857. **121.** p. 551. 1864. — Gesamm. Abh. S. 131.
Weber, Abh. d. k. sächs. Ges. d. Wiss. **6.** p. 569. 1864.
Roch, Beweg. d. El. in Leitern. Borch. J. **61.** p. 295. 1863.
Weingarten, Bemerk. dazu. Borch. J. **63.** p. 145. 1864.
Lorberg, Beweg. d. El. in nicht linearen Leitern, bes. el. Oscillationen in einer Kugel. Borch. J. **71.** p. 53. 1870.
Glaisher, El. motion in spheres. R. S. Trans. 1883. Bernstein, Pogg. Ann. **142.** p. 54. 1871; Berl. Ber., Juli 1871; Mouton, Par. C. R. **82.** p. 84. 18.
Stefan, Wien. Ber. **95.** p. 917. 1887. Wied. Ann. **41.** p. 400. 421.
Thomson (Zunahme des Widerstandes bei sehr raschen Schwingungen). Analogie der Dielektrica mit zähen Flüssigkeiten. Lum. él. **31.** p. 241. 1889.
J. J. Thomson, el. Schwingungen im cylindrischen Conduct. Lond. Proc. Math. Soc. **17.** p. 310. 1886.
Heaviside, über Blitzableiter, rasche electr. Wellen dringen nicht in den Leitungsdraht ein. Electrician Jan. 1885. Phil. Mag. (5) **25.** p. 153. 1888.
Poynting, Aehnliches. Phil. Trans. **2.** p. 277. 1885.
Lodge, Phil. Mag. (5) **26.** p. 217. 1888.

Theorie der Hughes'schen Inductionswage.

Hughes, Lond. Proc. R. S. Mai 1879. Phil. Mag. (5) **8.** p. 50. 1879.
Lodge, Phil. Mag. (5) **9.** p. 123. Febr. 1880.
Lord Rayleigh. Rep. Brit. Ass. 1880. p. 472.
Oberbeck, Wied. Ann. **31.** p. 812. 1887.

Beobachtung elektrischer Schwingungen an Leydener Flaschen.

Feddersen, Beiträge zur Kenntniss des el. Funkens. Diss. Kiel 1857. Pogg. Ann. **103.** p. 497. 1858. **108.** p. 497. 1859. **112.** p. 452. 1851. **113.** p. 437. 1861. **116.** p. 132. 1862. **130.** p. 439. 1867. Abh. Sächs. Ges. **11. 13.**
Palzow, Pogg. Ann. **112.** p. 567. 1861. **118.** p. 178. 357. 1863.

v. Oettingen, Pogg. Ann. **115.** p. 513. 1862. Jubelb. p. 269. 1874. Wied. Ann. **2.** p. 305. 1877. **34.** p. 570. 1888. **40.** p. 83 (Interferenz oscill. Entlad. v. Leydn. Flaschen).

Miesler, Bei eingeschalteten dünnen Drähten stimmt die Theorie. Wien. Ak. **99.** p. 579. 1890.

Elektrische Schwingungen in Drahtspulen und Condensatoren.

Schiller, Pogg. Ann. **152.** p. 535. 1874.

Oberbeck, Wied. Ann. **17.** p. 816. 1040. 1882. **19.** p. 213. 625. 1883. **21.** p. 139. 672. **22.** p. 73. 1884. **26.** p. 245. 1885. **28.** p. 335. 1886. Berl. Ak. 1882. 1883.

Winkelmann, Wied. Ann. **20.** p. 91. 1883.

Klemencic, Exner's Rep. **22.** p. 587. Wien. Ak. **93.** p. 470.

Hieke, Wien. Ak. **96.** p. 134. 1887.

Colley (Sehr leichter Magnetspiegel schwingt mit; Anwendung zur V-Bestimmung) Wied. Ann. **26.** p. 432. 1885. **28.** p. 1. 1886.

Bernstein, Pogg. Ann. **142.** p. 54. 1871. Berl. Ber., Juli 1871.

Mouton, Par. C. R. **82.** p. 84. 1876.

VI. Abhandlungen über Hertz'sche Schwingungen.

a) Vorwiegend experimentellen Inhalts.

Hertz, Berl. Ak. 9. Febr., 13. Dec. 1888. Wied. Ann. **34.** p. 155. 273. 551. 609. 1888. **36.** p. 1. 769. **37.** p. 395. 1889.

Fitzgerald, Durch Entladung eines Accumulators entstehen elektrische Wellen von 10 m Länge. Rep. Brit. Ass. 1883. p. 405.

—— Energie der elektrischen Strahlen. Nat. **29.** p. 167. 1884. Rep. Brit. Ass. 1883. p. 404. Nat. **41.** p. 295. 1890.

Sarasin et de la Rive propag. de l'ond. hertzienne. Die Wellenlänge hängt ab von der Schwingungsdauer des Secundärinductors. Arch. scienc. phys. Genève, (3) **23.** p. 113. 557. 1890. Par. C. R. 1891.

Cornu, Darauf gegründete Zweifel. Par. C. R. **110.** p. 75. 1890.

Joubert, Electricien. **6.** p. 318. 1889.

Rubens und Ritter, Beobachtung durch Froschschenkel und Messung durch Bolometer. Wied. Ann. **40.** p. 53. 55. 1890. **42.** p. 154. 1891.

Rubens, Studium der Energievertheilung in den Schwingungen mit Bolometer. Wied. Ann. **42.** p. 154. 1891.

Bartoniek, Beobachtung durch gerissene Glühlampen. Math. Ber. aus Ungarn **7.** p. 217. 1890. Beibl. **14.** p. 654.

Lecher, Beobachtung durch Geissler'sche Röhren, welche leuchten, wenn eine verschiebbare Ueberbrückung gerade auf den Knoten kommt, auch Bestimmung von Dielektricitätsconstanten. Wien. Ak. **99.** p. 357. 480. 1890. Wied. Ann. **41.** p. 850. 857. 1890.

Boltzmann, Beobachtung durch das Elektroskop. Wied. Ann. **40.** p. 399. 1890.

Classen, Beförderung der Funken durch einen Luftstrom. Wied. Ann. **39.** p. 647. 1890.

Wichert, Beobachtung durch das Mikroskop. Wied. Ann. **40.** p. 640. 1890.

K. Waitz, Wellenlängebestimmung durch Abgleichung einer Zweigleitung, sodass die Funkenintensität ein Minimum wird. Wied. Ann. **41.** p. 435. 1890.

Elsass, Die Enden zweier symmetrischer Leiter werden mit einem Telephon verbunden. Wied. Ann. **41.** p. 833. 1890.

Dragoumis, Beobachtung durch Geissler'sche Röhren. Nat. **39.** p. 548. 1889.

Trouton, Reflection und Brechung an Paraffin-, Wasser-, Metallwänden. Nat. **39.** p. 391. **40.** p. 398. 1889. Electrician **25.** p. 556. 1890.

Lodge und Howard, Concentration durch Linsen. Phil. Mag. Juli 1889. Proc. Phys. Soc. Lond. **10.** p. 143.

Gregory, Beob. d. Verläng. eines durch Hertz's Schwing. erhitzten feinen Drahtes. Proc. Phys. Soc. London. **10.** p. 290. 1890.

Blyth, Messung durch das Elektrometer. Electrician **24.** p. 442. 1890.

Klemencic, Messung mit Thermoelementen. Reflection am Schwefel. Wien. Ak. **99.** p. 725. 1890. Wien. Anzeig. Februar 1891.

Zickermann, Prüfung der Resonanz bei Hertz's Schwingungen. Dissert. Greifsw. 1889.

W. König, Der Oberflächenschiller von PtCy und J ist Hertz's Gitterpolarisatoren analog. Verh. Phys. Ges. Berl. **8.** p. 36. 1889.

Sarasin et de la Rive, Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Luft ist gleich der an einem Drahte. Par. C. R. 31. mars 1891.

Hagenbach und Zehnder, Hertz's Anschauungen wird widersprochen. Verh. d. naturf. Ges. zu Basel. **9.** p. 509. 1891.

b) Theorie der Hertz'schen Schwingungen.

Hertz, Wied. Ann. **31.** p. 421. 543. 1887. **36.** p. 1. 1889.

König, Wied. Ann. **37.** p. 651. 1889.

Poynting, Uebertrag. der Energie im el.-magn. Felde. Lond. Phil. Trans. 1884. p. 343.

J. J. Thomson, El. Schwingungen in der Kugel. Proc. Lond. math. Soc. **15.** 1884.

Lodge, El. Schwingungen in leitenden Kugeln. Nat. **41.** p. 462. 1890.

J. J. Thomson, Durch Einfluss der Zimmerwände kann die Geschwindigkeit der Fortpflanzung an einem Drahte verschieden von der in Luft ausfallen. Proc. R. S. Lond. **46.** p. 1. 1889.

Poincaré, Berechnung der Oscillationsdauer der Hertz'schen Schwingungen für verschieden gestaltete Inductoren. Par. C. R. **111.** p. 322. 1890.

Watson, Lodge, Discussion der von Hertz für seine Schwingungen aufgestellten Gleichungen. Nat. **39.** p. 486. 558. 583. 1889.

de la Rive, Theorie der Bildung stehender Wellen bei den Hertzschen Versuchen. Arch. de Genève (3) **23.** p. 391. 1890.

(Vgl. auch V, Lorberg und Thomson; VIIIb, Fitzgerald).

VII. Arbeiten über Dielektricitätsconstanten.

a) Allgemeines.

Cavendish, Electr. researches ed. by Maxwell. Cambr. 1879. p. 144. 432.

Faraday, Exp. res. 11. § 1189.

Rosetti, Nuov. Cim. (2) **10.** p. 171. 1873.

Belli, Corso element. di fisica sperim. 1838. **3.** p. 239. 294.

Harris, Phil. Trans. **132.** p. 165. 1842.

Mateucci, Par. C. R. **48.** p. 780. Ann. de chim. (3) **57.** p. 423. 1859. **27.** p. 133. 1849.

Werner Siemens Wippe u. Galv. Pogg. Ann. **102.** p. 91. 1857. **125.** p. 137. 1864.

Neyreneuff, Par. C. R. **85.** p. 547. **86.** p. 1542. 1877.

Schwedoff, Pogg. Ann. **137.** p. 559. 1869.

Gaugain, Ann. d. chim. (4) **2.** p. 276. 1864.

Bezold, Pogg. Ann. **143.** p. 62. 1871. Münch. Ak. 1870. 1877.

Wüllner, Münch. Ak. 1874. Wied. Ann. **1.** p. 247. 1877. **32.** p. 19. 1887.

b) Dielektricitätsconstante und Brechungsexponent bei isotropen festen und tropfbaren Körpern.

Gibson und Barklay, Paraffin aus Condensatorversuchen. Phil. Trans. **161.** p. 573. 1873.

Boltzmann, Romich, Nowak und Faydiga: Schwefel, Glas, Paraffin, Harz etc. aus Condensatorversuchen und aus der dielektrischen Fernwirkung (Anziehung dielektrisirter Kugeln durch freie Elektricität). Wien. Ber. **66.** p. 1. 256. 1872. **67.** p. 17. **68.** p. 155. 1873. **70.** p. 307. 367. 380. 1874. Pogg. Ann. **151.** p. 482. 1874. **155.** p. 403. 1875. Arch. d. Gen. **55.** p. 438. 1876.

Felici, Veränderung der Wirkung auf eine Drehwage durch dazwischengebrachte Würfel aus Schwefel, Wallrath etc. Nuov. Cim. **5.** p. 5. **6.** p. 73. 1871.

Gordon, Glas, Harze etc. aus Versuchen mit compensirten Condensatoren. Phil. Trans. 1879. p. 417. Nat. **20.** p. 485. 1879. **31.** p. 347. 1881.

Hopkinson, Aehnliches. Lond. Phil. Trans. 1881. II. p. 385. Proc. R. S. Lond. 1878. p. 17.

Ayrton und Perry, Dielektricität des Eises aus Condensatorversuchen. Phil. Mag. (5) **5.** p. 43. 1878.

Silow, Veränderung der Wirkung in einem Quadrantelektrometer bei Füllung mit dielektrischen Flüssigkeiten. Pogg. Ann. **156.** p. 389. 1875. **158.** p. 306. 1876.

Quincke, Messung der Anziehung von Condensatorplatten durch Wägung, Aenderung der Gestalt von Luftblasen etc. Berl. Ber. **5.** p. 4. 1883. Wied. Ann. **19.** p. 545. 705. 1883. **24.** p. 347. 606. 1885. **28.** p. 529. 1886. **32.** p. 529. 1887. **34.** p. 401. 1888.

Ayrton und Perry, Brechungsexponent des Ebonits. Phil. Mag. (5) **12.** p. 196. 1881.

Palaz, (Benzol, Toluol etc. auch Temperaturcoefficient). Dissertation Zürich 1886.

Fuchs, Aehnliches aus Condensatorversuchen. Wien. Ber. **98.** p. 1240. 1889.

Negreano, Benzin, Toluol etc. Paris. C. R. **104.** p. 423. 1887.

Salviani, (einige Oele). Roma, Acc. d. Lincei (3) **4.** p. 136. 1888.

Hopkinson, Benzol, Paraff. etc. Proc. R. S. Lond. **43.** p. 156. 1887.

Tereschinin, Alkohole, Formiate, Acetate etc. nach Silow-Cohn's Methode. Wied. Ann. **36.** p. 792. 1889.

Tomaszewski, Terpentinöl, Benzol nach Silow's Methode. Wied. Ann. **33.** p. 33. 1888.

Winkelmann, Glas, Ebonit, Paraffin mit dem Telephon. Wied. Ann. **38.** p. 161. 1889.

Donle, Glas, Paraffin, Aether Petroleum mit Bellati Giltay's Electro-Dynamometer. Wied. Ann. **40.** p. 307. 732. 1890.

J. J. Thomson, Dielektricitätsconstante aus Hertz's Schwingungen. Proc. R. S. Lond. **46.** p. 292. 1889. Vgl. Lecher, unter VIa. citirt.

c) Halbleiter, Absorption.

Colley, Diel. Polaris. von Electrolyten (ölsaures Blei etc.). Wied. Ann. **15.** p. 94. 1882.

Cohn und Arons sogar Alkohol und Wasser. Silow's Methode und andere. Wied. Ann. **33.** p. 13. 31. 1888. **38.** p. 42. 1889.

Gouy, Par. C. R. **106.** p. 930. 1888.

Dieterici, Paraffin und Schellack geben Rückstand. Wied. Ann. **25.** p. 545. 1885.

Arons, Polemik dagegen. Wied. Ann. **35.** p. 291. 1888.

Rowland und Nichols, Phil. Mag. (5) **11.** p. 414. 1881.

d) Krystalle.

Wiedemann, Pogg. Ann. **76.** p. 404. 1849.

Knoblauch, Pogg. Ann. **83.** p. 289. 1851.

de Senarmont, Ann. de chim. (3) **28.** p. 287. 1850.
Root, Pogg. Ann. **158.** p. 1. 425. 1876.
Curie, Dielektricität und Absorption von Krystallen. Par. C. R. **103.** p. 928. 1886. Lum. él. **28.** p. 580. **29.** p. 13. 127. 1888.
Klemencic, Glimmer als Dielektrikum. Wien. Ber. **96.** p. 807. 1887.
Bouty, Aehnliches. Par. C. R. **110.** p. 846. 1362. 1890.
Boltzmann, Romich, Nowack, Dielektrische Fernwirkung auf Krystalle. Wien. Ber. **70.** p. 342. 367.

e) Dielektricität der Gase.

Boltzmann, Wien. Ber. **69.** p. 797.
Ayrton und Perry, Asiat. soc. of Jap., 18. Apr. 1877.
Dielektricität des Sprengel'schen Vacuum. Ayrton, Lodge, Gordon, Perry. Rep. Brit. Ass. 1880. p. 197.
Klemencic, Dielektricitätsconst. einiger Gase mit Wippe und Galv. Wien. Ber. **91.** p. 714. 1885.

VIII Optik vom Standpunkte der Elektricitätslehre.

a) Erste Anfänge.

Oerstedt, Euler etc. Vgl. Christiansen, Die el. magn. Lichttheorie. Overs. d. k. dansk Vidensk. Selsk. Forhandl. 1889. p. 183.
Green, Grundz. der Naturlehre. Halle 1797. § 1408.
Faraday, Exp. res. 3075, Thoughts on ray vibr. Phil. Mag. 1846.
Weber und Kohlrausch, erste V-Bestimmung. El. dyn. Maassbestimmungen. Sächs. Ges. d. Wissensch. Leipzig 1856. (Die verschiedenen V-Bestimmungen, siehe Wiedemann, Elektricität IV. p. 994.

b) Allgemeine Optik.

A. Lorenz, Reflexion und Brechung des Lichtes. Arnheim Sande 1875. Beibl. 1877.
G. F. Fitzgerald, El. magn. Theorie d. Reflexion u. Brechung. Lond. R. S. Proc. **28.** p. 236. 1879. L. Phil. Trans. 1880. p. 691.
—— Ueber die Möglichkeit, wellenartig el. Störungen hervorzurufen. Dubl. Trans. (2) **1.** p. 133. 173. 1880.
Rowland, El. magn. Theorie der Brechung (Huygens Princip). Phil. Mag. (5) **17.** p. 413. 1884. Am. Journ. of Math. **6.** p. 359. 1883.
C. A. H. Grinwis, Lichtabsorption nach Maxwell's Theorie. Amsterdam. Akad. **10.** p. 371. 1877. Arch. néerl. **12.** p. 177. 1877.
Gibbs, Notes on el. magn. theory of light. Sill. Journ. **23.** p. 262. 460. 1882/3.

Vergleich der elektr. u. elast. Lichttheorie bezüglich Farbenzerstreuung und Doppelbrechung. Sill. Journ. **35.** p. 467. 1888.
Vergleich mit Thomson's Wirbeltheorie des Lichtes. Sill. Journ. **37.** p. 129. 1889.
Glazebrook, Rep. on opt. theories. Rep. Brit. Ass. 1886. p. 153; Phil. Trans. 1879.
Rayleigh, El. mag. Th. des Lichts; Reflexion, Absorption, Polarisation. Phil. Mag. (5) **12.** p. 81. 1881.
F. T. Trouton, Erklärung der Phasenverschiebung bei der Reflexion aus der elektromagn. Lichttheorie. Phil. Mag. (5) **29.** p. 268. 1890.
Cohn, Die Durchsichtigkeit der Elektrolyten beginnt bei Schwingungsdauern die zwischen den Hertz'schen und denen des Lichtes liegen. Gött. Nachr. 1889. Wied. Ann. **38.** p. 217. 1889.

c) Doppelbrechung und Drehung der Polarisationsebene.

Kolaček, Wied. Ann. **34.** p. 673. 1888. **39.** p. 236. 1890.
Heaviside, Phil. Mag. (5) **19.** p. 397. 1885.
J. J. Thomson, Phil. Mag. (5) **9.** p. 284. 1880. Cambr. phil. Soc. 5250. 1885. (Dreh. d. Pol.)
Schaik (Dreh. d. Pol.). Arch. néerl. t. **21.** p. 406. 1886. **18.** p. 70. 1882.

Zweiter Anhang.

Zusammenstellung der Bezeichnungen dieses Buches mit denen Helmholtz's (Borchardt's Journal **72.** p. 57. 1870), Stefan's (Wien. Sitzungsber. **70.** p. 589. Dec. 1874) und Hertz's (Göttinger Nachrichten 19. März 1890. Wied. Ann. **40.** p. 577. 1890.) (Schlüssel).

In den wenigen Fällen, wo sich die Bezeichnungen Maxwell's mit denen des vorliegenden Buches nicht genau decken, sind die ersteren (speciell die in dessen Treatise on Electr. angewandten) in eckiger Klammer beigefügt. Da namentlich die Helmholtz'sche Theorie vielfach von der Maxwell'schen abweicht, ist die Uebereinstimmung der zugeordneten Bezeichnungen oft keine vollständige. Wo dies besonders stark hervortritt, wurde ein Fragezeichen beigefügt. Zwei Fragezeichen bedeuten eine völlige Verschiedenheit beider Begriffe, die nur einer gewissen Analogie wegen in Parallele gesetzt wurden.

Dieses Buch	Helmholtz	Stefan	Hertz
$\mathfrak{V}[V]$	$1:A$	a	A
C	$1:\varkappa$	—	$A\lambda$
$k[K]$	$4\pi\varepsilon$	$4\pi h$	$A\varepsilon$
μ	$A^2(1+4\pi\vartheta)$	$(1+4\pi k):a^2$	$A\mu$
Null	k	Null	Null
f, g, h	$\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$	α, β, γ	$\frac{A\mathfrak{X}}{4\pi}, \frac{A\mathfrak{Y}}{4\pi}, \frac{A\mathfrak{Z}}{4\pi}$
$\frac{df}{dt}, \frac{dg}{dt}, \frac{dh}{dt}$	u_0, v_0, w_0	—	—
p, q, r	u_2, v_2, w_2	u, v, w	u, v, w
u, v, w	u, v, w	—	—
a, b, c	$\frac{\lambda}{\vartheta}A(1+4\pi\vartheta)$, $\frac{\mu}{\vartheta}A(1+4\pi\vartheta)$, $\frac{\nu}{\vartheta}A(1+4\pi\vartheta)$?	$\frac{\lambda(1+4\pi k)}{ak}$, $\frac{\mu(1+4\pi k)}{ak}$, $\frac{\nu(1+4\pi k)}{ak}$	$A\mathfrak{L}, A\mathfrak{M}, A\mathfrak{N}$
$4\pi\alpha, 4\pi\beta, 4\pi\gamma$ $[\alpha, \beta, \gamma]$	Componenten der magnetischen Kraft		L, M, N
$F:\mu, G:\mu, H:\mu$?	U, V, W	X, Y, Z	—
P, Q, R	—	—	X, Y, Z
$-X_1-\frac{k}{4\pi c}\frac{dX_2}{dt}$, $-Y_1-\frac{k}{4\pi c}\frac{dY_2}{dt}$, $-Z_1-\frac{k}{4\pi c}\frac{dZ_2}{dt}$,	—	—	X', Y', Z'
X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2	$\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$; ?? X, Y, Z	—	—
$\varphi[V]$	χ	—	ψ
$\psi[\Psi]$	φ	U	φ

Besonders zu bemerken ist, dass man aus Helmholtz's Formeln die Maxwell'schen erhält, wenn man in ersteren ϑ und ε schon für Luft und daher auch für alle anderen Körper gross gegen die Einheit, k aber gleich Null setzt.

Helmholtz, H. v., Wissenschaftliche Abhandlungen.

2 Bände. gr. 8°. 1882—83. Mit Porträt in Stahlstich und 8 lith. Tafeln. ℳ 40.—

Seiner Zeit in selbständigen Broschüren, oder in verschiedenen Zeitschriften veröffentlicht, ist ein grosser Teil der hier wieder herausgegebenen Abhandlungen gar nicht mehr oder doch nur unter besonderen Schwierigkeiten zugänglich gewesen. — In Anbetracht ihrer Wichtigkeit konnte daher eine nochmalige Herausgabe in gleichmässiger moderner Ausstattung als Bedürfnis betrachtet werden und die günstige Aufnahme, welche dieselbe bei dem wissenschaftlichen Publikum fand, hat diese Annahme vollauf gerechtfertigt.

In dieser neuen Gesamtausgabe sind überall die Seitenzahlen des Originaldrucks am Rande angegeben, so dass Citate nach letzterem auch in der neuen Ausgabe nachgeschlagen werden können.

Jeder der beiden Bände wird allein abgegeben, dagegen können einzelne Abhandlungen oder Gruppen derselben nicht geliefert werden.

Erster Band.

VIII, 938 Seit. gr. 8° mit Porträt und 3 lithogr. Tafeln. ℳ 20.—

Inhalt:

Zur Lehre von der Energie: Bericht über die Theorie der physiologischen Wärmeerscheinungen für 1845. — Über die Erhaltung der Kraft. 1847. — Erwiderung auf die Bemerkungen von Hrn. Clausius. 1854. — Über Eigenschaften des Eises. 1865. — **Hydrodynamik:** Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. 1858. — Sur le mouvement le plus général d'un fluide. 1868. — Sur le mouvement des fluides. — Réponse à la note de M. S. Bertrand. 1868. — Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. 1868. — Über ein Theorem, geometrisch ähnliche Bewegungen flüssiger Körper betreffend, nebst Anwendung auf das Problem, Luftballons zu lenken. 1873. — Über Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. 1860. — Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten. 1869. — **Schallbewegung:** Bericht über die theoretische Akustik betreffenden Arbeiten im Jahre 1848 und 1849. — Über Kombinationstöne. 1856. — Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. 1859. — Über den Einfluss der Reibung in der Luft auf die Schallbewegung. 1863. — Zur Theorie der Zungenpfeifen. 1861. — Über die Vokale. 1857. — Über die Klangfarbe der Vokale. 1859. — Über Klangfarben. 1860. — Über die Bewegung der Violinsaiten. 1860. — Über musikalische Temperatur. 1860. — Über die arabisch-persische Tonleiter. 1862. — **Elektrodynamik:** Über die Dauer und den Verlauf der durch Stromesschwankungen induzierten Ströme. 1851. — Telephon und Klangfarbe. 1878. — Über einige Gesetze der Verteilung elektrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die tierisch-elektrischen Versuche. 1853. — Über eine allgemeine Transformationsmethode der Probleme über elektrische Verteilung. 1862. — Über die physiologische Wirkung kurzdauernder elektrischer Schläge im Innern von ausgedehnten leitenden Massen. 1869. — Über elektrische Oscillationen. 1869. — Über die Gesetze der inkonstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern. 1870. — Über die Theorie der Elektrodynamik. I. Abhandl.: Über die Bewegungsgleichungen der Elektrizität für ruhende leitende Körper. 1870. — Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektro-

dynamischen Wirkungen. 1871. — Über die Theorie der Elektrodynamik: Vorläufiger Bericht. 1872. — Über die Theorie der Elektrodynamik. II. Abhandl.: Kritisches. 1873. — Vergleich des Ampère'schen und Neumann'schen Gesetzes für die elektro-dynamischen Kräfte. 1873. — Über die Theorie der Elektrodynamik. III. Abhandl.: Die elektro-dynamischen Kräfte in bewegten Leitern. 1874. — Kritisches zur Elektrodynamik. 1874. — Versuche über die im ungeschlossenen Kreise durch Bewegung induzierten elektromotorischen Kräfte. 1875. — Bericht betreffend Versuche über die elektromagnetische Wirkung elektrischer Konvection, ausgeführt von Hrn. Henry A. Rowland. 1876. — Über die auf das Innere magnetisch oder dielektrisch polarisierter Körper wirkenden Kräfte. 1881. — **Galvanismus:** Ueber galvanische Polarisation in gasfreien Flüssigkeiten. 1873. — Bericht über Versuche des Hrn. Dr. Root aus Boston: Die Durchdringung des Platins mit elektrolyt. Gasen betr. 1876. — Über galvanische Ströme, verursacht durch Konzentrationsunterschiede; Folgerungen aus der mechanischen Wärmetheorie. 1877. — Studien über elektrische Grenzschichten. 1879. — Über Bewegungsströme am polarisierten Platina. 1880. — Eine elektro-dynamische Wage. 1881. — Über galvanische Polarisation des Quecksilbers. 1881.

Zweiter Band.

VI, 1021 Seit. gr. 8° m. Holzschnitten u. 5 lith. Tafeln. ℳ 20.—

Inhalt:

Physikalische Optik: Über die Theorie der zusammengesetzten Farben. 1852. — Über Hrn. D. Brewster's neue Analyse des Sonnenlichtes. 1852. — Über die Zusammensetzung von Spektralfarben. 1855. — Über die Empfindlichkeit der menschlichen Netzhaut für die brechbarsten Strahlen des Sonnenlichtes. 1855. — Über die Messung der Wellenlänge des ultravioletten Lichtes, von E. Esselbach. 1855. — Mathematisch-physikalische Exkurse. 1867. — Über die Grenzen der Leistungsfähigkeit der Mikroskope. 1873. — Die theoretische Grenze für die Leistungsfähigkeit der Mikroskope. 1874. — Zur Theorie der anomalen Dispersion. 1874. — **Physiologische Optik:** Beschreibung eines Augenspiegels zur Untersuchung der Netzhaut im lebenden Auge. 1851. — Über eine neue einfachste Form des Augenspiegels. 1852. — Über eine bisher unbekannte Veränderung am menschlichen Auge bei veränderter Akkomodation. 1853. — Über die Akkomodation des Auges. 1856. — Über Farbenblindheit. 1859. — Über die Kontrasterscheinungen im Auge. 1860. — Über die Bewegungen des menschlichen Auges. 1863. — Über die normalen Bewegungen des menschlichen Auges. 1863. — Über die Form des Horopters, mathematisch bestimmt. 1862. — Über den Horopter. 1864. — Bemerkung über die Form des Horopters. 1864. — Über den Einfluss der Raddrehung der Augen auf die Projektion der Retinalbilder nach aussen. 1864. — Das Telestereoskop. 1857. — Über stereoskopisches Sehen. 1865. — Über die Bedeutung der Konvergenzstellung der Augen für die Beurteilung des Abstandes binocular gesehener Objekte. 1878. — **Physiologische Akustik:** Über die Mechanik der Gehörknöchelchen. 1867. — Die Mechanik der Gehörknöchelchen und des Trommelfelles. 1869. — Über die Schallschwingungen in der Schnecke des Ohres. 1869. — **Erkenntnistheorie:** Über die Natur der menschlichen Sinnesempfindungen. 1852. — Über die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie. 1866. — Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen. 1868. — Über den Ursprung und Sinn der geometrischen Sätze. 1878. — **Phy-**

siologie: De Fabrica Systematis nervosi Evertebratorum. 1842. — Wärme, physiologisch. 1845. — Über das Wesen der Fäulnis und Gärung. 1843. — Über den Stoffverbrauch bei der Muskelaktion. 1845. — Über die Wärmeentwickelung bei der Muskelaktion. 1847. — Messungen über den zeitlichen Verlauf der Zuckung animalischer Muskeln und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den Nerven. 1850. — Messungen über Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den Nerven. Zweite Reihe. 1852. — Über die Methoden, kleinste Zeitteile zu messen, und ihre Anwendung für physiologische Zwecke. 1850. — Über die Geschwindigkeit einiger Vorgänge in Muskeln und Nerven. 1855. — Die Resultate der neueren Forschungen über tierische Elektrizität. 1852. — Versuche über das Muskelgeräusch. 1864. — Über den Muskelton. 1866. — Mitteilungen, betreffend Versuche über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den motorischen Nerven des Menschen. 1867. — Neue Versuche über denselben Gegenstand. 1870. — Über die Zeit, welche nötig ist, damit ein Gesichtseindruck zum Bewusstsein kommt. 1871. — Über die Bewegungen des Brustkastens. 1856. — Die Wirkungen der Muskeln des Armes. 1856. — **Nachtrag neuester Abhandlungen:** Die Thermodynamik chemischer Vorgänge. 1882. — Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. 1882. — Über absolute Massysteme für elektrische und magnetische Grössen. 1882.

Kirchhoff, G., Gesammelte Abhandlungen. gr. 8. VIII, 641 Seiten mit 1 lith. Tafel, 1 Spektraltafel und Porträt in Stahlstich. 1882. *M* 15.—

Wie die Sammlung der v. Helmholtz'schen, so enthält auch vorstehende Ausgabe der Kirchhoff'schen Abhandlungen einen unveränderten Wiederabdruck der seit 1845 an verschiedenen Orten veröffentlichten Arbeiten. Dieselben sind nach verwandtem Inhalt geordnet und nachstehend verzeichnet:

Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige. 1845. — Nachtrag zu dem vorigen Aufsatze. 1846. — Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird. 1847. — Über die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Teil aus nicht linearen Leitern bestehen. 1848. — Über eine Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschliesst. 1849. — Über die stationären elektrischen Strömungen in einer gekrümmten leitenden Fläche. 1875. — Über die Messung elektrischer Leitungsfähigkeiten. 1880. — Über die Verteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln. 1861. — Zur Theorie des Kondensators. 1877. — Bestimmung der Konstanten, von welcher die Intensität induzierter elektrischer Ströme abhängt. 1849. — Über die Bewegung der Elektrizität in Drähten. 1857. — Über die Bewegung der Elektrizität in Leitern. 1857. — Zur Theorie der Entladung einer Leydener Flasche. 1864. — Zur Theorie der Bewegung der Elektrizität in unterseeischen oder unterirdischen Telegraphendrähten. 1877. — Über den induzierten Magnetismus eines unbegrenzten Cylinders von weichem Eisen. 1853. — Zur Theorie des in einem Eisen-

körper induzierten Magnetismus. 1870. — Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. 1850. — Über die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe. 1850. — Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes. 1858. — Über das Verhältnis der Querkontraktion zur Längendilatation bei Stäben von federhartem Stahl. 1859. — Über die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt. 1879. — Über die Reflexion und Brechung des Lichts an der Grenze krystallinischer Mittel. 1876. — Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. 1869. — Über die Kräfte, welche zwei unendlich dünne, starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können. 1869. — Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen. 1869. — Über stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit. 1879. — Versuche über stehende Schwingungen des Wassers. 1880. — Über einen Satz der mechanischen Wärmetheorie und einige Anwendungen desselben. 1858. — Bemerkung über die Spannung des Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind. 1858. — Über die Spannung des Dampfes von Mischungen aus Wasser und Schwefelsäure. 1858. — Über die Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme. 1879. — Über den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung. 1868. — Über den Winkel der optischen Axen des Aragonits für die verschiedenen Fraunhofer'schen Linien. 1859. — Über die Fraunhofer'schen Linien. 1859. — Über den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme. 1859. — Über das Verhältnis zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht. 1862. — Chemische Analyse durch Spektralbeobachtungen. 1860. — Zur Geschichte der Spektral-Analyse und der Analyse der Sonnenatmosphäre. 1862.

Als Ergänzung hierzu erschien 1891:

Nachtrag zu G. Kirchhoff's Gesammelten Abhandlungen. Herausgegeben von Prof. Dr. Ludwig Boltzmann. gr. 8. VII, 137 Seiten mit 1 lith. Tafel. *M* 3,60.

Inhalt:

Ueber die Leitungsfähigkeit der Metalle für Wärme und Elektrizität von G. Kirchhoff und G. Hansemann. 1881. — Bemerkungen zu dem Aufsatze des Hrn. Voigt „zur Theorie des leuchtenden Punkts". 1882. — Zur Theorie der Lichtstrahlen. 1882. — Über die elektrischen Strömungen in einem Kreiscylinder. 1883. — Über die Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand von G. Hansemann. 1884. — Zur Theorie der Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand. 1884. — Über die Formänderung, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlektrisch polarisiert wird. 1884. — Über einige Anwendungen der Theorie der Formänderung, welche ein Körper erfährt, wenn er magnetisch oder diëlektrisch polarisiert wird. 1884. — Zur Theorie der Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln. 1885.

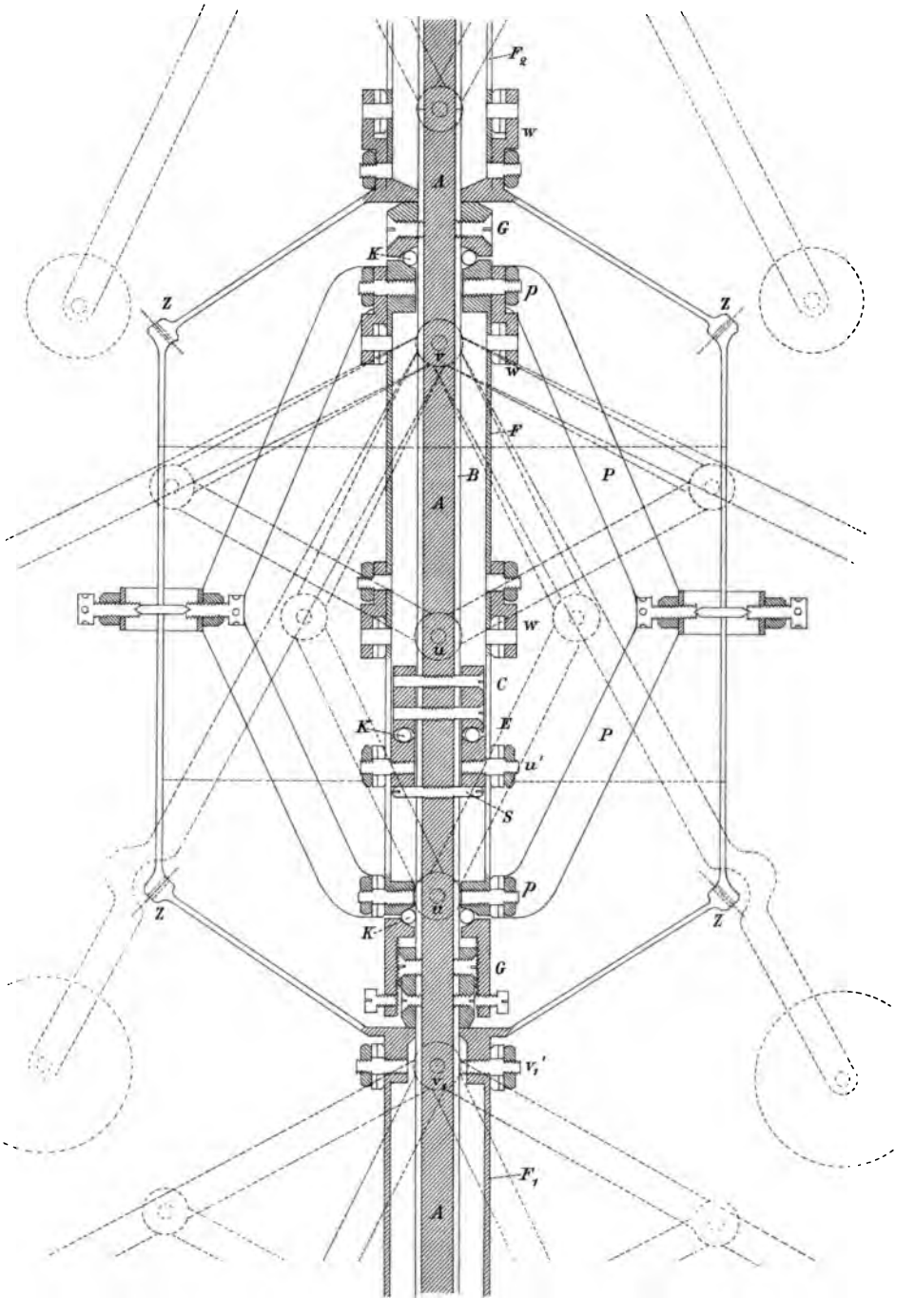


Fig. 14.

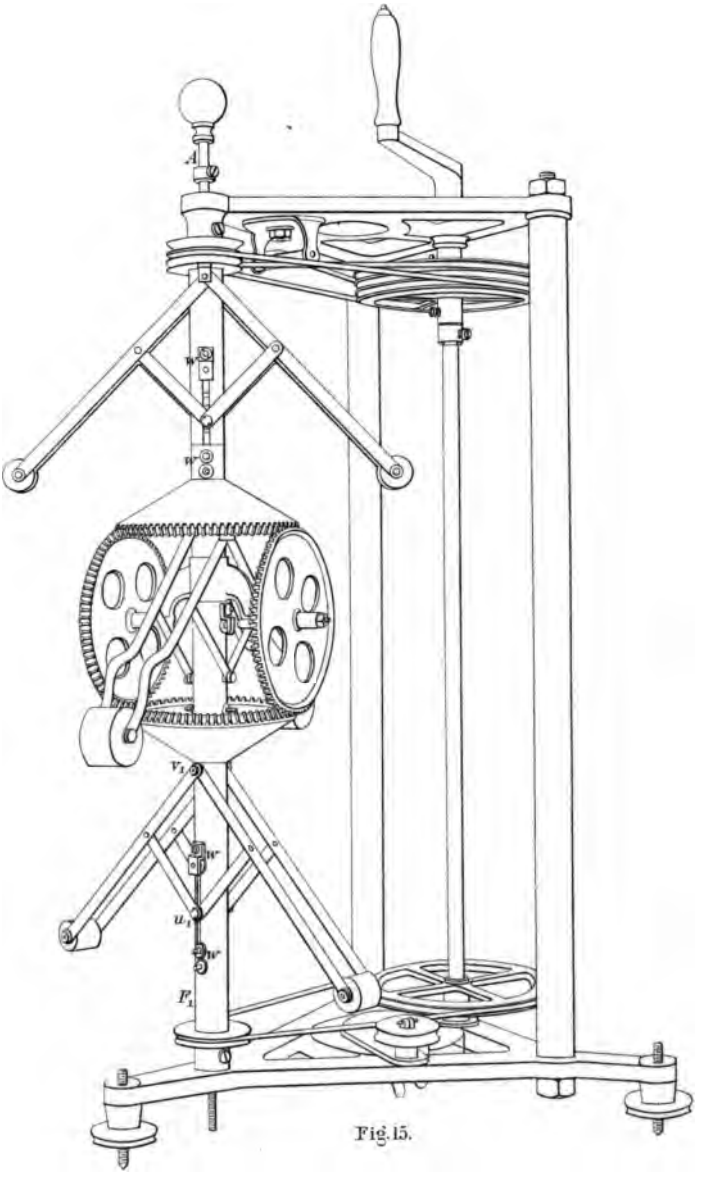


Fig. 15.

Lith. Anst. v. C. Kurst. Leipzig

Stanford University Libraries
3 6105 004 978 081

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
STANFORD AUXILIARY LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-9201
All books may be recalled after 7 days

DATE DUE

28D NOV 19 1994